目　次

1 绪　　论

本章论述偏微分方程及其定解问题有关的基本概念和物理模型，论述某些一般性的原理、理论和定理，对从总体上了解课程的特点、内容、意义和方法和指导以后各章具体内容的讨论有一般意义.

1.1 基本概念

1.1.1 **某些一般性概念**

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为自变量，$u(x)$ 为未知函数，则称

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)=0$$

为一个微分方程，其中 F 为所含变元的已知函数，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，$F$ 中可以不显含自变数和未知函数，但必含 u 的某个导数. $n=1$ 时为常微分方程，$n\geqslant 2$ 时为偏微分方程，此课程讨论偏微分方程的问题.

出现在方程中的最高阶偏导数的阶数称为方程的阶，也称之为微分式 F 的阶.

如果方程 $F=0$ 对未知函数和所有偏导数均是线性的，则称之为线性方程，否则称为非线性方程.

在线性方程 $F=0$ 中，如果 F 是 u 和所有偏导数的线性齐次式，则称为线性齐次方程，否则称为线性非齐次方程.

设 $u(x)$ 在区域 $\Omega\subset R^n$ 中具有直到方程阶数的连续偏导数，把之代入方程得恒等式，则称 $u(x)$ 为区域 Ω 内方程的一个解，

这种解又称为古典意义下的古典解，有时需推广解的概念，讨论某些更广意义下的广义解.

一般情况下区域 Ω 内方程的解是很多的，一个自然的问题是要讨论方程解的全体，即通解. 一个 n 阶常微分方程通解是包含有 n 个独立积分常数的解族，而 n 阶线性齐次常微分方程的通解是 n 个线性独立解的线性组合. 但是人们发现，偏微分方程通解的问题很为复杂，线性方程也是如此，对于某些很特殊的方程，它的通解可以表示为包含某些任意函数的解族.

例 1 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$. 设自变量为 x，y，$u(x, y)$ 为未知函数.

它是一个最简单的偏微分方程，它是两个自变量的一阶线性齐次方程，从方程知 $u(x, y)$ 必然不显含 x，另一方面对于任意的一阶连续可微的函数 f，$u=f(y)$ 给出了方程的解，所以方程的通解是 $u=f(y)$，而 f 是任意一阶连续可微的函数.

例 2 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

式中 a 为常数，此为两个自变量 t，x 的一阶线性齐次方程，又常称为单波方程，作自变量的变数代换

$$\begin{cases}\xi=x\\ \eta=x-at\end{cases}$$

则 u 作为新的自变数 ξ，η 的函数，为简单计仍记作 $u(\xi, \eta)$，则它满足

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

所以 $u=f(\eta)$ 为它的通解，回到原来的自变量得

$$u=f(x-at)$$

是原方程的通解，其中 f 为任意的一阶连续可微函数.

例 3 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

这是两个自变量时最简单的二阶方程，是线性齐次的，根据例 1 的分析可得

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = f(y), f \text{ 是任意函数}$$

对 y 积分得

$$u(x, y) = \int f(y)\,\mathrm{d}y + g(x), \; g(x) \text{ 是任意函数}$$

$$u(x, y) = h(y) + g(x), \; h(y) \text{ 和 } g(x) \text{ 是任意函数}$$

反之，只要 h 和 g 是任意二阶连续可微的函数，上述函数一定是所给偏微分方程的解，所以上述表达式就是方程的通解.

例 4 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

上式常称为一维波动方程，其中 a 是正常数，它也是二阶线性齐次方程. 作自变量的代换

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

则作为 ξ, η 的函数 $u(\xi, \eta)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

所以

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

这就是一维波动方程的通解，它也是包含有两个任意函数 f 和 g.

例 5 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

它称之为二维调和方程，此方程也是二阶线性齐次方程，而且也很简单，但是要类似例 4 那样找出方程的通解已不容易，要找到方程的某些特解较为简单. 例如，令 $z = x + yi$ 为复变量，

则任何解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部均满足二维调和方程，特别对于任意的非负整数 n，z^n 的实部和虚部都是满足调和方程的二元 n 次多项式，如果用极坐标 r，φ，即 $r^n\cos n\varphi$，$r^n\sin n\varphi$ 均是二维调和方程的解．另外，当 $r\neq 0$ 时，$\ln\dfrac{1}{r}$ 也是二维调和方程的解，此解在二维调和方程的讨论中将起着基本作用．

例 6 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+6uu_x+u_{xxx}=0$

这是一著名的三阶非线性偏微分方程，常称为 KDV 方程，要找到它的某些特解已经不易，关于它的解，在非线性方程的理论中已有一些较成熟的理论和方法，例如，对于任意的常数 k 和 δ，$u(x,t)=\dfrac{k^2}{2}\operatorname{sech}^2\dfrac{k}{2}(x-k^2t+\delta)$ 是 KDV 方程的一个特解，称它为一个右行孤波．因为它也是右行单波方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+k^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ 和波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k^4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 的一个特解．

1.1.2 定解问题及其适定性

在通常情况，在一个区域 Ω 内偏微分方程的解很多，但是除了某些很特殊的方程外，很难找到它的通解较为明确的表达形式，所以偏微分方程的中心问题是讨论方程某些特解，要求特解还要满足附加的特定条件．这种条件称为定解条件，方程和定解条件联立而构成一个定解问题，这时又称方程为泛定方程，即

$$\text{定解问题}\begin{cases}\text{泛定方程} \quad F=0, \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\\ \text{定解条件}\end{cases}$$

定解条件是各式各样的，其一般形式是要求当 x 从 Ω 内趋于 Ω 的某一部分边界点时，某些个包含 u 和 u 的某些导数的微分式有确定的极限函数．简单地讲，定解问题要求把未知函数按一定的光滑性一直延拓到 Ω 的边界上，而定解条件是给定在 Ω 某一部分边界上的一个微分等式．根据数学上的形式不同，有些定解条

件称为初值条件，有的称为边值条件，从而把定解问题相应地分为初值问题、边值问题和混合问题，本课程的中心问题就是讨论各类定解问题的解. 下面列举一些经典的定解问题.

例 1 n 维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(x, t),\ t > 0,\ x \in R^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (\text{初值条件}) \end{cases}$$

例 2 n 维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(x, t),\ t > 0,\ x \in R^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (\text{初值条件}) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \quad (\text{初值条件}) \end{cases}$$

例 3 n 维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(x, t),\ t > 0,\ x \in \Omega \subset R^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (\text{初值条件}) \\ \left.\left(\alpha(x)\, u + \beta(x) \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega} = g(x, t) \quad (\text{边值条件}) \end{cases}$$

其中 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, Ω 为 R^n 中的一个区域, $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 表示对边界外法向的导数.

一维热传导方程的混合问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\left(\alpha_1 u - \beta_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = \mu_1(t),\ \left.\left(\alpha_2 u + \beta_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

其中 $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0 \quad (i = 1, 2)$. 类似地可列出一维波动方程的混合问题.

例 4 n 维调各方程的边值问题

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad x\in\Omega\subset R^n \\
\left(\alpha(x)\,u+\beta(x)\,\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=g(x) \quad \text{（边值条件）}
\end{cases}
$$

边界条件的假设条件和热传导方程中混合问题中的边界条件相同，当 $\beta=0$ 时，此时，不妨设 $\alpha=1$，称为第一边界条件，相应地称定解问题为第一边值问题；当 $\alpha=0$，此时不妨设 $\beta=1$ 称为第二边值条件和第二边值问题；当 $\alpha(x)>0$，$\beta(x)>0$ 时称为第三边值条件和第三边值问题.

称调和方程的非齐次方程 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f(x)$ 为泊松方程，类似地可提泊松方程的边值问题.

上列的热传导方程、波动方程、调和方程和泊松方程数学上是三类方程的典型代表，物理上是描述三种不同的物理过程，上列的定解问题也是典型的定解问题，有很广泛的应用，所以不能把它们视为简单的特例，课程中将着重于这几个典型问题求解的方法和理论的讨论，从中来显示一般问题的中心思想. 另外，为了把有些理论和方法推广到更为一般的问题，反过来指导特殊问题的讨论，并把特殊问题的细节看得更清楚，本教材也较多地讨论和介绍偏微分方程问题的某些较为一般的理论和方法.

从上列几个典型的问题可以看到，不同类型的方程，其定解条件和定解问题的提法是不同的，这一方面将可以从它们描述的不同物理过程得到解释，另外一方面应该从数学上加以研究，按一定的准则来判断一个定解问题是否合适，这就引出了定解问题适定性的概念：**一个定解问题如果满足存在性、唯一性和连续依赖性（即稳定性），则称定解问题是适定的，否则就称为不适的**. 所谓连续依赖性指的是当定解条件中的数据变化很小时，对应的解变化也很小，否则就称为不连续依赖的，当然，连续依赖性还依赖于如何规定数据变化的尺度和解的变化的尺度，不同的尺度有

可能引出不同的结论. 如果我们把一个定解问题认为是确定了一个从定解条件的函数组到定解问题的解的一个映射，稳定性表明此映射是一个连续映射，由于在实际问题中定解条件的数据是测得的，总会有一定的误差，如果定解问题不稳定会给物理的解释带来困难，甚至失去意义.

定解问题适定性的概念是阿达玛(Hadamard)首先提出的，对偏微分方程的研究起着重要的指导作用. 经研究表明，上面所列的经典定解问题均是适定的，而且可以把这种理论结果推广到更为一般的类型相同的线性方程的定解问题中. 但是，近代科学技术中也提出了许多不适定的问题，不适定问题仍然具有重大的理论意义和应用价值，不适定问题的研究已成为一个重大的研究方向.

例 5　一维齐次波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ x \in R^1 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

因为方程的通解为 $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$，根据初始条件得

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ -a f'(x) + a g'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ f(x) - g(x) = -\dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x) - \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi + C\right) \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x) + \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{x_u}^{x} \psi(\xi)\, d\xi - C\right] \end{cases}$$

因而可唯一地确定得

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

这样就证明了解的唯一性，即如果定解问题有解，则必然只能是上述由 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 唯一确定的函数，**称上述解的公式为达郎贝尔公式(D' Alembert)**.

又若 $\varphi(x)\in C^2(R^1)$，$\psi(x)\in C^1(R^1)$，则它在经典的意义下满足方程和定解条件，这就证明了解的存在性.

又因方程和定解条件是线性的，根据 $u(x,t)$ 的表达式可知，对于任意的 x 和 $0\leqslant t\leqslant T$，当 $\max(|\varphi(x)|,|\psi(x)|)\leqslant\delta$ 时，$|u(x,t)|\leqslant\delta\cdot(1+T)$. 这就证明了定解问题的稳定性. 从而此定解问题是适定的.

例 6　二维调和方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x>0,\ y\in R^1\\ u\big|_{x=0}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\dfrac{1}{n^k}\sin ny\end{cases}$$

不难直接验证

$$u(x,y)=\frac{1}{n^{k+1}}\left(\frac{\mathrm{e}^{nx}-\mathrm{e}^{-nx}}{2}\right)\sin n\,y$$

给出问题的解. 又根据将要介绍的霍耳曼格(Holmgren)唯一性定理，上述初值问题的解是唯一的，但从解的表达式可以看出，当 n 充分大时，初始数据可以充分地小，但解确可以充分地大，所以调和方程的初值问题不满足稳定性，从而不适定.

1.1.3　广　义　解

区域 Ω 内方程的古典解要求在 Ω 内至少具有方程阶的光滑性，而定解问题的解还需要求解函数能按一定的光滑性一直延拓

到 Ω 的边界上，但是在理论和实际应用中，由于方程中的某些系数或定解条件中的某些函数不够光滑等原因，古典解不再存在，所以必然要求推广解的概念而引出广义解.

广义解的意义是多种多样的，可以根据问题的物理意义和数学上的规定来定义不同意义下的各种广义解. 总的说来，广义解不必具有古典解那样的光滑性，可以在更大的函数类中来选择解，只要求它在某种更为广泛的意义下满足方程和定解条件. 但是作为古典解的推广，任何一种意义下的广义解必须满足两个条件，第一条是古典解必为广义解，第二条是当广义解具有古典解所要求的光滑性时，则它也是古典解. 所以通过广义解来研究古典解也是近代偏微分方程研究中一个一般方法，即先在较广的函数类中来讨论广义解的存在唯一性等性质，再进一步讨论广义解的光滑性.

定义广义解的形式很多，但其实质可以理解为古典解序列在某种意义下的极限，极限的意义是多种多样的，所以广义解也是多种多样. 例如用局部一致收敛或局部均方收敛的极限关系来定义广义解，设 $u_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是某二阶方程在区域 Ω 内的古典解序列，如果当 k 趋于 ∞ 时，在包含于 Ω 内的任意有界闭区域上 $u_k(x)$ 一致收敛于 $u(x)$，则称 $u(x)$ 为此方程在 Ω 内的一个广义解，显然这时只能保证 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 Ω 内连续，如果把局部一致收敛改为局部均方收敛，则 $u(x)$ 为更广的意义下的广义解，这时只能保证 $u(x)$ 在 Ω 内局部平方可积，它甚至可以在 Ω 内不连续. 从数学上还可以定义许多更广的极限关系，使广义解容许包含很奇异的函数类，但是通常最终得到的解总是具有某种正则性的广义解，它的奇性只出现在某些孤立的点或低维的曲面上. 例如数学和物理学中常提到弱间断解和强间断解的概念，对二阶方程而言，若除了 Ω 内的一光滑面 S 外，$u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 二阶连续且满足方程，但在 S 上 $u(x)$ 保持一阶连续而二阶导数有第一类的间断，则称 $u(x)$ 为方程 Ω 内的一个弱间断解. 如

果在 S 上 $u(x)$ 仅保持连续而一阶导数就有第一类间断，则称 $u(x)$ 为方程 Ω 内的一个强间断解. 均称 S 为解的间断面.

例 1 设一维波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$，则当 $f(x) \in C(R^1)$ 时，$f(x-at)$ 和 $f(x+at)$ 给出方程在 R^2 中的广义解. 根据数学分析的一个一般性的定理，存在无穷次连续可微的函数序列 $f_n(x)$ 在 R^1 上局部一致收敛于 $f(x)$，所以在 R^2 中 $f_n(x-at)$ 和 $f_n(x+at)$ 局部一致收敛于 $f(x-at)$ 和 $f(x+at)$.

例 2 设初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ t > 0, \ x \in R^1 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

当 $\varphi(x) \in C^2$ 时，它有唯一的古典解

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right)$$

但当 $\varphi(x)$ 只是连续，$\varphi'(x)$ 有间断时，初值问题的古典解不存在，但是上述公式仍给出问题的广义解. 如果 $\varphi'(x)$ 只在 $x = c$ 点有第一类间段，在其它点处均二阶连续，则上列的 $u(x, t)$ 给出了问题的一强间断解，而 $x - at = c$ 和 $x + at = c$ 是解的间断线.

定义广义解的方法很多，从上述的陈述中已可了解广义解的一般意义，在以后的例题或习题中所得到的各种形式解，一般不再讨论在什么情况下它是古典解，在什么情况下它是广义解. 在有些情况下所得到的用级数表示或用积分表示的形式解甚至在通常意义下是发散的，但在某种意义下仍给出问题的广义解.

1.2 模　　型

一般说来，本课程要讨论的偏微分方程及其定解问题是某些

物理模型简化抽象而得出的数学模型，这也是本课程称为数学物理偏微分方程的理由. 物理模型又是由一些更实际更为复杂的问题和现象简化抽象而来的，本节只能用两个简单例子来说明从实际的问题到数学模型的抽象简化过程，较多的例子是直接列举力学，物理学等自然科学中一些经典的偏微分方程问题，说明它们的物理意义供有关的读者参考，而不是说明问题的细节.

在一个偏微分方程的问题中，自变量经常表示时间变量和空间变量，未知函数表示描述某物理过程的某一物理量. 泛定方程表示物理量的转换和守恒定律，它只能描述物理过程的一般规律，还不能完全确定一个物理过程. 定解条件表示某一确定的物理过程发生的具体条件和环境，初始条件表示开始时刻的状态. 边界条件表示物理过程和周围环境的关系，它也是表示某物理量的转换和守恒定律. 一个定解问题才能完全确定出表征物理过程的物理量随时间和空间变化的物理场，如果讨论的是不随时间变化的稳定过程，则只有边界条件而得边值问题. 一个定解问题的物理意义给定解问题某些定量和定性的结果一定的物理解释，同时也给定解问题的研究从物理模型中得到启示.

1.2.1 弦的横振动问题

这是一个实际问题，例如弦乐器中弦的振动过程，如果要考虑影响这一过程的众多因素，问题是十分复杂的，为此必须舍去那些次要的因素作出基本符合实际的许多理想化的假设把问题简化成一个更为确切的物理模型，在这过程中有时还需作许多简化.

因为弦很细，所以把弦理想化为质量的一维分布. 因为弦很细软，把弦理想化为完全柔软的，即弦无抗弯能力，弦的内部互相作用的力是沿着弦的切向的张力，又设弦处于平衡位置时是位在一直线段上，而在振动过程中弦各质点的振动方向垂直此直线段，而且是处在同一个平面内，又设振动是很微小的.

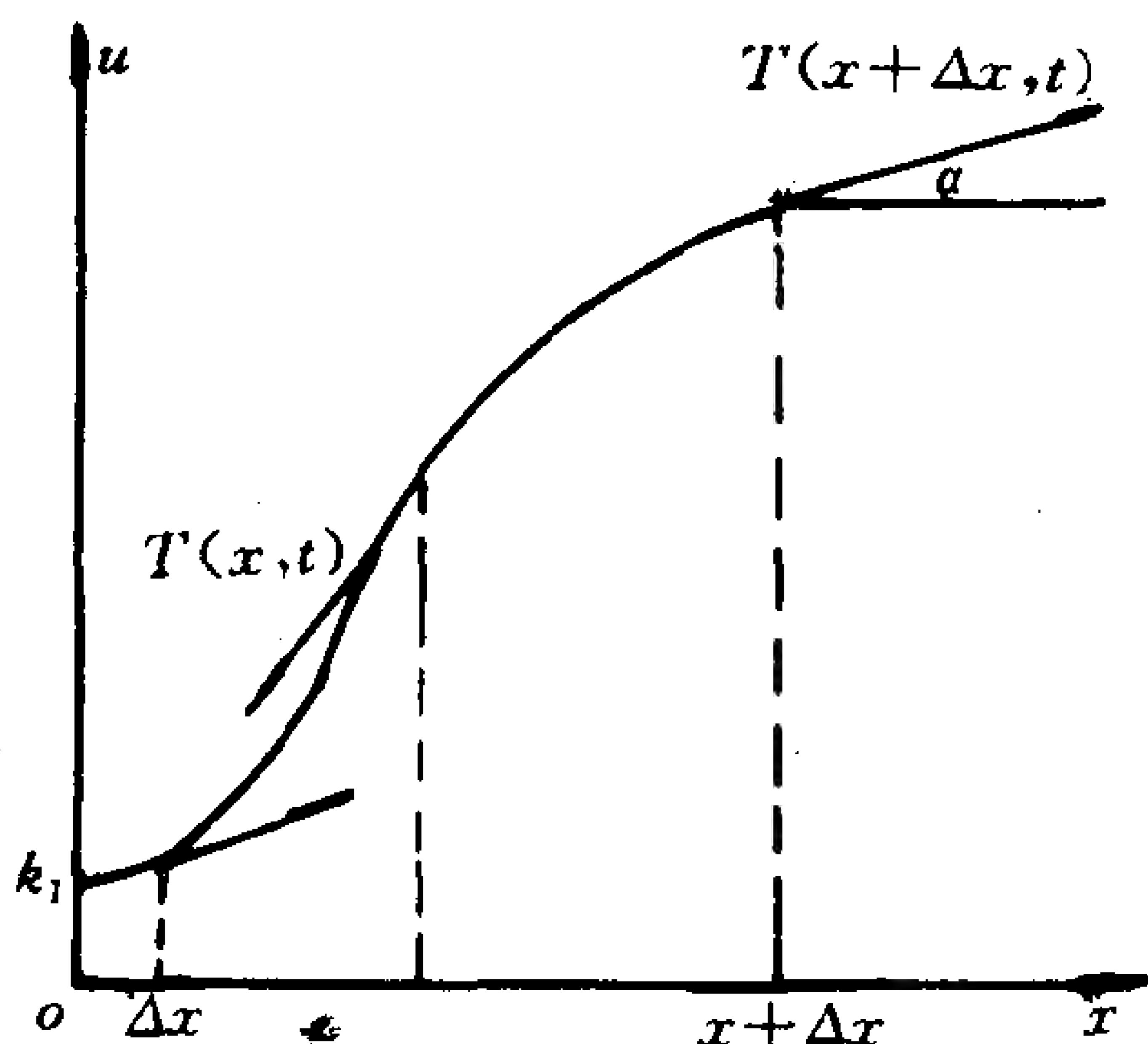


图 1.1

选取时空坐标系 (x, t)，t 为时间，x 为空间坐标轴，设当弦处于平衡位置时位于 x 轴的区间 $[0, l]$ 上，用弦上的质点相对于平衡位置的横向位移 u 作为表征此过程的物理量，$u(x, t)$ 表示在时刻 t 在 x 点处的质点的位移. 又根据假设，在任何时刻振动的方面总是垂直于 x 轴而且总是处于同一平面内，所以把 t 作为参变数时，在 t 时刻建立直角坐标系 (x, u)（图 1.1），$u = u(x, t)$ 表示在 t 时刻弦的曲线段方程，小振动假设表示 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，视 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 为一级小量，设 $\alpha(x, t)$ 为弦上的点 (x, u) 的切线和 x 轴的夹角，$T(x, t)$ 表示此点张力的大小 $\rho(x, t)$ 表示此点的密度，则 $\operatorname{tg}\alpha(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$，在一级近似下

$$\cos\alpha(x, t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} = \pm\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right) \approx \pm 1$$

$$\sin\alpha(x, t) = \frac{\pm \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \pm\frac{\partial u}{\partial x}$$

不妨前边的符号均取正号.

在弦的内部任取位于 $[x, x + \Delta x]$ 之间的一个小弧段，在一级近似下，此微元小弧段的弧长为

$$\mathrm{d}s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x \approx \Delta x,$$

即在振动过程中微元的长度保持不变，所以张力的大小和密度均

不随时间变化，即为 $T(x)$ 和 $\rho(x)$．又设 $F(x,t)$ 是外加的横向力的密度，略去阻力和重力．当 Δx 很小时，把弦的此小的微元看作是弦振动过程中一个具代表性的质点，根据牛顿第二定律，在一级近似下得运动方程

$$\begin{cases} T(x+\Delta x)-T(x)=0 & (x\text{ 方向力的平衡}) \\ \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t) & (\text{横向的运动方程}) \end{cases}$$

因此 T 为一个常数，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{T}{\rho(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{\rho(x)}$$

即
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

其中 $a^2(x)=\dfrac{T}{\rho(x)}$，$f(x,t)$ 为质量力，如果无外力，则得齐次方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

如果对于均匀的弦，$\rho=$ 常数，则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

这是一维波动方程，又称之为弦振动方程．

为了确定弦的振动还需要知道初始条件和边界条件．初始条件是

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad(\text{初始位移})$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\quad(\text{初始速度})$$

为了确定在两个端点 $x=0$ 和 $x=l$ 处的边界条件，也是和在弦内取一代表微元推出弦振动方程相仿，要从讨论在端点附近一个小微元的运动方程来推出．以端点 $x=0$ 的边界条件说明，取弦上 $[0,\Delta x]$ 之间的一个小弧段，设在端点 $x=0$ 处有一弹性系数为 k_1 的弹性支撑，在此小弧段上受到的横向力有：端点 $x=0$ 的

弹性恢复力 $-k_1 u(0,t)$，在 $x=\Delta x$ 处的张力 $T\dfrac{\partial u(\Delta x,0)}{\partial x}$，外力 $F(0,t)\Delta x$，根据牛顿第二定律得

$$\rho(0)\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial t^2}\Delta x=-k_1 u(0,t)+T\frac{\partial u(\Delta x,t)}{\partial x}+F(0,t)\Delta x$$

令 $\Delta x\to 0$ 得

$$-k_1 u(0,t)+T\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$$

这就是在端点 $x=0$ 处的边界条件. 如果在端点 $x=0$ 处还加上 $\mu_1(t)$ 的横向力，则边界条件为

$$-k_1 u(0,t)+T\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=-\mu_1(t)$$

类似地可推出在端点 $x=l$ 处边界条件

$$-k_2 u(l,t)-T\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=-\mu_2(t)$$

其中 k_2 是系于 $x=l$ 处弹性支撑的弹性系数，$\mu_2(t)$ 是集中作用于端点 $x=l$ 的横向力.

如果 $\mu_1(t)=0$, $k_1\gg T$，则得 $u(0,t)=0$，这时称为 $x=0$ 端固定. 如果 $\mu_1(t)=0$, $k_1\ll T$，则得 $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$，这时称为 $x=0$ 端自由，类似地 $x=l$ 端也有相应的情况.

综上所述，我们把弦的横向微小振动归结到偏微分方程的混合问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad t>0,\ 0<x<l$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\quad（初始条件）$$

$$\left.\left(k_1 u-T\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right|_{x=0}=0,\left.\left(k_2 u+T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=0\quad（边界条件）$$

如果是两边无界的弦，则归结为初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad t>0,\ x\in R^l$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$$

当然，实际的问题只能是一很长的弦，而我们讨论的是离两个端点较远的中间一段的振动且忽略边界的影响而得的初值问题. 如果是半无界的弦也得混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), & t>0,\ x>0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) & \text{（初值条件）}\\ \left.\left(k_1 u-T\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=0 & \text{（边值条件）}\end{cases}$$

如果在弦振动过程中还要考虑阻力的影响，设阻力和速度成正比，则方程变为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-R\frac{\partial u}{\partial t}+f(x,t)$$

其中 R 为阻力系数. 如果阻力的作用远远超过惯性力的作用，则方程变为

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-R\frac{\partial u}{\partial t}=-f(x,t)$$

问题起了本质的变化，这成为一维热传导方程，初始条件只需给出 $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$，边界条件保持相同.

1.2.2 热传导问题和分子的扩散问题

讨论在三维空间中各向同性的介质 Ω 内热的传导过程，例如一个金属物体的冷却过程. 热的传导是由于温度分布的不均匀而产生热的传递，而不是由于物质的流动而引起的热能的输运.

设 t 为时间变量，(x, y, z) 为空间点 M 对于选定了空间直角坐标系的坐标，选取温度 u 为表征此过程的物理量，$u(x, y, z, t)=u(M, t)$ 为温度分布场，它表示在点 $M(x, y, z)$ 处 t 时刻的温度.

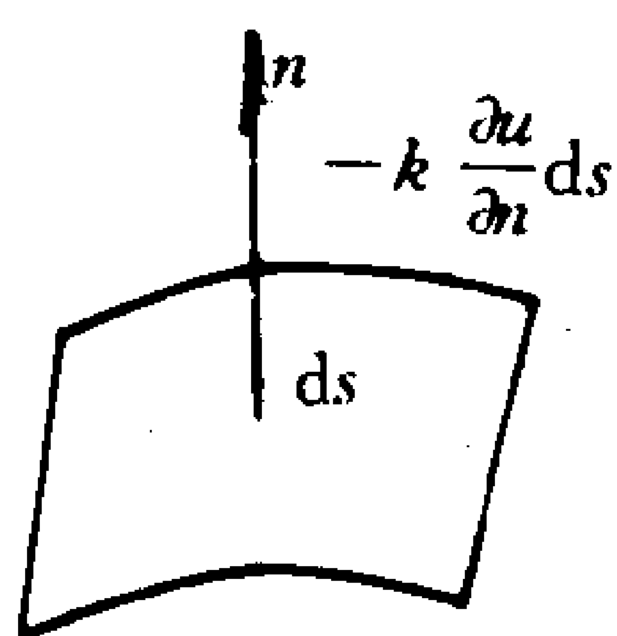


图 1.2

热在介质 Ω 内的传导遵守付立叶(Fourier)实验定律：设在 Ω 内任意包含点 $M(x, y, z)$ 的一个小的面积微元 ds，并指定好一个单位法向 $\vec{n}$（图 1.2），则在很小的时间 $[t, t+dt]$ 内，通过 ds 流向 $\vec{n}$ 所指的一侧的热量是

$$dQ = -k(x, y, z)\frac{\partial u(M, t)}{\partial n}dsdt,$$

其中 ds 同时表示微面积元的面积，$k(x, y, z)$ 为介质在点 M 的热传导系数，加了负号表明热量由高温的区域的一侧流入低温区域的一侧.

设 $F(x, y, z, t)$ 是外加的体热源强度，$\rho(x, y, z)$，$c(x, y, z)$ 分别为介质的密度和比热. 在 Ω 内任取一个小的微体元 V，∂V 为其边界，根据热传导定律，在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内此小微元 V 内热量的平衡得等式

$$\int_{t_2}^{t_2}dt\iiint_V\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdydz = \int_{t_1}^{t_2}dt\oint\!\!\oint_{\partial V}\left(k\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds + \int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V F\,dxdydz$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示关于 ∂V 的外法向导数，右端两项分别表示根据热传导定律通过边界流入 V 内的热量和外加的热源提供给 V 内的热量，而左端表示由于温度的改变所需的热量.

应用高斯公式，上述等式变为

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz = \int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_{\partial V}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F\right]dxdydz$$

由于 $[t_1, t_2]$ 和 V 的任意性可得

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t)$$

对于均匀介质，c，ρ，k 均为常数而得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t)$$

其中 $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$，$f=\frac{F}{c\rho}$，称此为热传导方程，它支配着温度场所满足的一般规律，为了完全确定温度分布还需提出初始条件和边界条件，初始条件为

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)\quad（初始温度分布）$$

推导边界条件的方法和推导热传导方程时相仿，也是要根据热量的平衡来推出，这时除了应用介质内的热传导定律外，还需应用所讨论的介质和周围介质进行热交换的牛顿(Newton)热交换定律：在图1.2中，设 $\mathrm{d}s$ 是所讨论介质 Ω 的边界的一个小微元，n 的方向指向 Ω 的外侧，设 $u_e(x,y,z,t)$ 为外侧环境的温度，$u(x,y,z,t)$ 是 Ω 的内侧的温度，则在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时间区间内通过边界的面积微元 $\mathrm{d}s$ 从 Ω 的内侧流出外侧的热量是

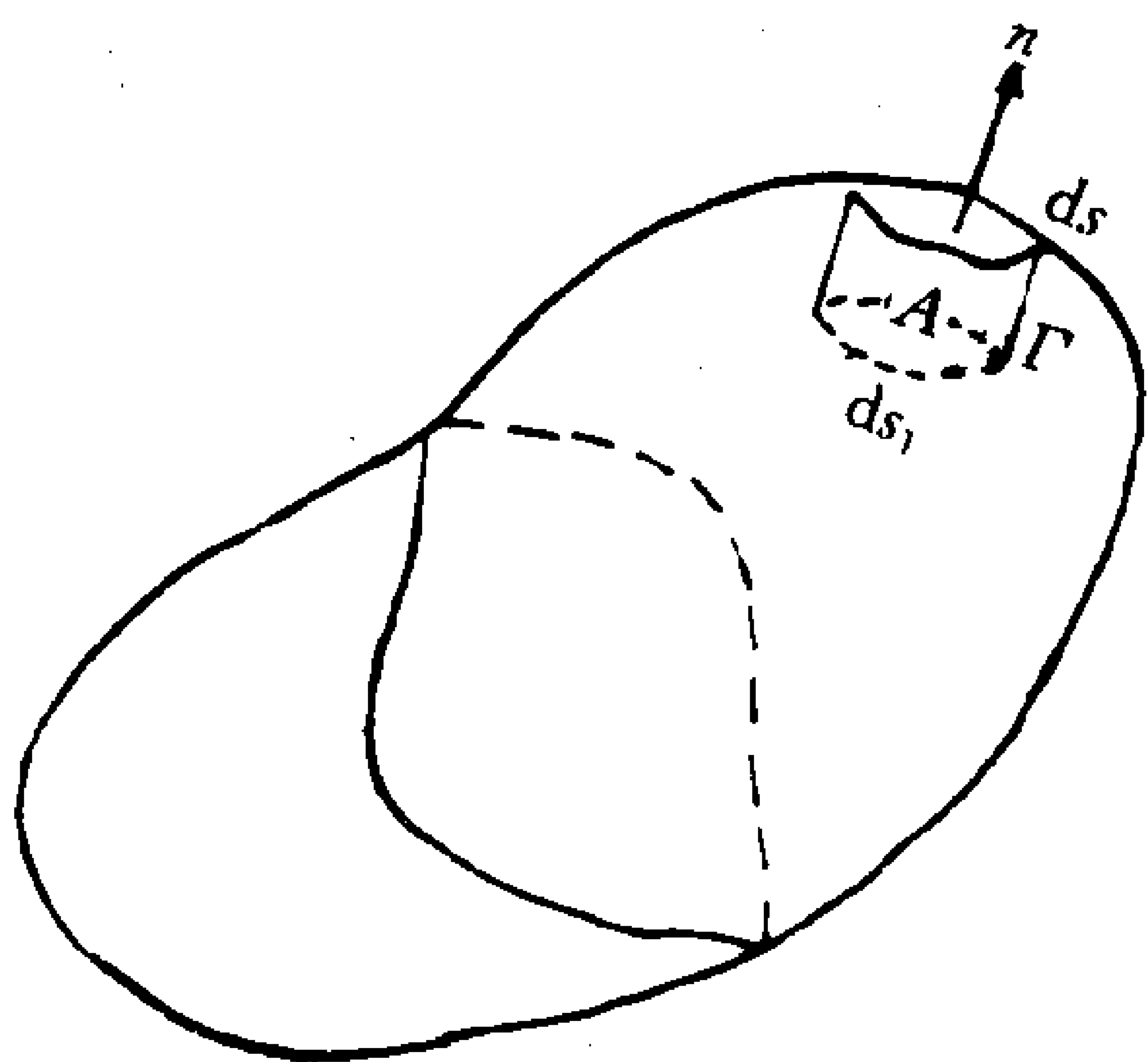


图 1.3

$$\mathrm{d}Q=h(x,y,z)(u(x,y,z,t)-u_e(x,y,z,t))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

其中 $h(x,y,z)$ 为介质 Ω 和外侧环境在边界点 $M(x,y,z)$ 的热交换系数．如图1.3，在介质 Ω 的边界附近取一个小的微柱体积元 A．其底面 $\mathrm{d}s$ 为 Ω 的边界的一小元面，另一个底面 $\mathrm{d}s_1$ 和侧面 Γ 均在 Ω 内部，根据热传导定律和热交换定律建立在时间区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内在元柱体 A 内热平衡的等式，再令 $\mathrm{d}s_1$ 无限地趋于 $\mathrm{d}s$ 时得等式

$$[h(x,y,z)(u(x,y,z,t)-u_e(x,y,z,t))$$

$$+ k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n}\Big] = 0$$

由于 ds 是 Ω 的边界的任意微面元，故得边界条件

$$\left(h(x,y,z)\, u + k(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = h(x,y,z)\, u_e(x,y,z,t)$$

当 $h \gg k$ 时，边界条件为

$$u\big|_{\partial\Omega} = u_e(x, y, z, t)$$

即物体在边界的温度和外侧环境的温度相同，$k \gg h$ 时，得

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

这表示介质和外部环境无热量交换，即绝热.

综上所述可得均匀介质 Ω 的热传导问题归结到定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t) \\ \qquad\qquad\qquad t > 0, (x, y, z) \in \Omega \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad \text{（初始温度）} \\ \left(h\, u + k \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = h\, u_e \quad \text{（边界条件）} \end{cases}$$

如果讨论全空间内的介质的热传导过程，得初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t), t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \end{cases}$$

如果讨论半空间 $z > 0$ 内介质的热传导问题也得混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad + f(x, y, z, t), t > 0, z > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \\ \left(h\, u - k \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = hu_e \end{cases}$$

如果讨论介质 Ω 内稳定的温度分布，则得泊松方程的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\dfrac{1}{a^2} f(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega \\ \left(h u + k \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = hu_e \end{cases}$$

如果无外加的稳定热源，则得调和方程的边值问题.

如果讨论一无穷长柱体内均匀介质的热传导问题，设柱的轴平行于 z 轴，其截面在 oxy 平面的投影为一平面区域 Ω，如果由于问题的对称性设一切量均和变量 z 无关，则数学上归结到二维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t), t > 0, (x, y) \in \Omega \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \\ \left(h u + k \dfrac{\partial u}{\partial n} +\right)\Big|_{\partial\Omega} = hu_e \end{cases}$$

如果讨论一有限长的柱体内的热传导，设轴线为 z 轴，下底面在 $z = 0$ 上，上底面在 $z = l$ 上，如果由于对称的原因，设一切物理量和 x，y 无关，且不计柱体侧面和环境的热交换，则得一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(z, t), t > 0, 0 < z < l \\ u|_{t=0} = \varphi(z) \\ \left(h_1 u - k \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \mu_1(t) \\ \left(h_2 u + k \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

这种问题又可称之为杆的热传导问题，如果还要计柱体侧面的热交换，则定解问题归结为

$$\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - b u + g(z, t), t > 0, 0 < z < l$$

$$u|_{t=0} = \varphi(z)$$

$$\left(h_1 u - k\frac{\partial u}{\partial z} + \right)\bigg|_{z=0} = \mu_1(t)$$

$$\left(h_2 u + k\frac{\partial u}{\partial z} + \right)\bigg|_{z=l} = \mu_2(t)$$

在杆的热传导问题中，如果热传导系数和温度 u 本身有关，则可得非线性热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(z, t)$$

这时边界条件也是非线性的，而得非线性定解的问题.

在讨论三维空间区域 Ω 内介质的分子扩散过程时，也会归结到和热传导过程相同的各种定解问题，所以热传导方程又称为扩散方程. 分子扩散是质量的输运过程，例如，溶液中溶质从浓度高处扩散到浓度低处，某些固体中的杂质也有扩散的现象，取定时空坐标 (t, x, y, z) 后，用溶质的浓度或固体中杂质的密度 $u(x, y, z, t)$ 来作为表征扩散过程的物理量. 扩散过程服从菲克(Frck)扩散定律:仍如图 1.1，在时间区间 $[t, t+dt]$ 内通过介质内的一个过点 $M(x, y, z)$ 的小面元 $\mathrm{d}s$ 流向由法向 $\vec{n}$ 指定的一侧的质量是

$$\mathrm{d}M = -D(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

其中称 D 为介质的扩散系数. 由此，类似地可以推出扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right) + f(x, y, z, t)$$

其中 $f(x, y, z, t)$ 是外加的质量源的强度.

1.2.3 薄膜的横振动和平衡问题

要讨论一很薄的柔软的拉紧了的弹性薄膜的微小横向振动，例如鼓膜的振动过程，此问题和弦的振动很相似. 由于很薄和柔软，则可认为膜是质量的二维分布，认为膜是完全柔软的，即它抗伸张而不抗弯曲，设膜的平衡位置是在一个直角坐标平面 oxy

内的一个区域 Ω 中，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，而膜上各质点的振动方面均垂直于此平面，设 t 为时间坐标，用膜上质点相对于平衡位置的横向位移 $u(x,y,t)$ 作为表征此过程的物理量，设 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \ll 1$，把它们作为一级小量，为简单计，设膜是均匀的，$\rho$，$T$ 分别表示密度和张力的大小，$F(x, y, t)$ 为外加的力强度，则可得关于 $u(x, y, t)$ 的定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
\qquad\qquad + f(x, y, t),\ t > 0, (x, y) \in \Omega \\
u|_{t=0} = \varphi(x, y) \quad (\text{初始位移}) \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x, y) \quad (\text{初始位移速度}) \\
\left(T\dfrac{\partial u}{\partial n} + k u\right)\Big|_{\partial\Omega} = - g
\end{cases}
$$

其中 k 是加在边界 $\partial\Omega$ 上的弹性支撑的弹性系数，g 是加在边界 $\partial\Omega$ 上的外力，$a^2 = \dfrac{T}{\rho}$.

如果讨论稳态问题，一切量和时间无关，即变为薄膜的平衡问题，则可得关于 $u(x, y)$ 的二维泊松方程或二维调和方程的边值问题.

1.2.4 电磁波和稳定的电磁场

设 t 为时间变量，(x, y, z) 为空间变量，$\vec{E}(x, y, z, t)$ 和 $\vec{H}(x, y, z, t)$ 分别表示电场强度和磁场强度，为简单计，设介质是均匀的，ε，μ，σ 分别表示介质的介电常数，磁导率和电导率，则电磁场满足马克斯威尔(Maxwell)方程组

$$\nabla \times \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = 4\pi\rho(x, y, z, t)$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0$$

其中 ∇ 是关于空间变量的梯度算子，$\rho(x, y, z)$ 为电荷体密度，此方程组虽然是有 6 个未知函数的 8 个方程组成的超定方程组，但是不难证明，只要初始条件

$$\vec{E}\,|_{t=0} = \vec{E}_0(x, y, z)$$

$$\vec{H}\,|_{t=0} = \vec{H}_0(x, y, z)$$

满足后两个方程，即

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}_0) = 4\pi\rho(x, y, z) \\ \nabla \cdot (\mu \vec{H}_0) = 0 \end{cases}$$

则满足前 6 个方程的 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 在任意的时刻 $t > 0$ 会自然地满足后两个方程，所以在讨论非稳定的电磁场时，后两个方程实际上只是关于初始条件的一种限制.

为了在 R^3 中的某一区域 Ω 中确定电磁场的分布、除初始条件外，还要提边界条件，例如最简单的是已知 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的分布，但许多实际的问题边界条件是较为复杂的.

对于方程组的问题，为了简化问题，减少未知函数的个数，有时可对方程组作某些微分运算和代数运算来消去某些未知函数，或者引入适当的未知函数变换，在进行这些运算和变换时常常用到基础数学场论中的基础知识. 在马克斯威尔方程组中，对第一个向量方程作旋度运算，然后根据方程组消去 $\vec{H}$ 可得只含 $\vec{E}$ 的方程组

$$\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \Delta \vec{E} + \nabla \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(x, y, z) = 0$$

如果对第二个向量方程作旋度运算，然后根据方程组消去 $\vec{E}$ 可得方程组

$$\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \Delta \vec{H} = 0$$

其中Δ是拉普拉斯(Laplace)算子$\nabla\cdot\nabla$. 如果$\sigma=0$，即介质不导电时，则得到标准的向量形式的波动方程，特别对于真空介质$\sigma=0$, $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$为光在真空中的传播速度. 如果$\varepsilon=0$，即介质高度导电时，所得到的是标准的向量形式的热传导方程，这时问题有了本质的不同，不再是一种波动过程，当然通常均设$\varepsilon\neq 0$, $\mu\neq 0$，这时问题是一种波动过程.

从上述的结果可知，如果在全空间讨论均匀介质中的电磁波时，只要讨论初值问题，而且这时对电磁场强度的每一分量均可独立地求解标量波动方程($\sigma=0$时)，或求解推广了的标量波动方程($\sigma\neq 0$时). 如果是在有界区域中求解，则还应提边界条件，通常边界条件较复杂，常常表现为各分量的偶合形式，这时只能联立求解.

如果讨论稳定的电磁场，这时一切量和时间无关而得静电场或静磁场的基本方程组. 静电场的基本方程组为

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=4\pi\rho(x,y,z)\end{cases}$$

由于$\vec{E}$无旋，而引入电位场$\varphi(x,y,z)$, $\vec{E}=-\nabla\varphi$，则可得泊松方程

$$\nabla\varphi=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(x,y,z)$$

$\rho=0$时，则为三维调和方程. 如果是在一个有界区域Ω中，则还要根据物理条件提出一定的边界条件而得泊松方程或调和方程的边值问题，如果在全空间R^3中，则只要加上在无穷远处φ趋于零的条件，也可唯一地确定得全空间的电位

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{R^3}\rho(\xi,\rho,\zeta)\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

此公式的物理意义只要从位于点(ξ,η,ζ)的单位点电荷在整个

空间产生的电位是 $\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$ 即可得到解释.

* 1.2.5 固体弹性波

设 t 为时间坐标，(x, y, z) 为空间坐标，用弹性体的质点相对于平衡位置的位移向量 $\vec{u}(x, y, z, t)$ 来表征弹性体在应力和外源作用下所引起的形变和运动，在小变形下各向同性的弹性介质，其内力构成一应力张量，即三阶对称阵

$$\vec{\sigma}=\begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

其中三个行向量分别表示对应垂直于各坐标轴的单位面积的应力向量，σ_x，σ_y，σ_z 表示正应力，其余的表示剪切应力，设 $\vec{u}=(u, v, w)^T$，应力和位移的关系由虎克(Hooke)定律给出为

$$\sigma_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz}=\sigma_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yz}=\sigma_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

其中 $\theta=\nabla\cdot\vec{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$，$\lambda$ 和 μ 是拉美参数，一般情况它们是空间变量的非负函数. 又设 $\rho(x, y, z)$ 为质量密度，$\vec{F}(x, y, z, t)=(F_1, F_2, F_3)^T$ 为外加的体积力强度，根据牛顿第二定

律得出运动方程组

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_x)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_{xy})+\dfrac{\partial}{\partial z}(\sigma_{xz})+F_1 \\ \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_{yx})+\dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_y)+\dfrac{\partial}{\partial z}(\sigma_{yz})+F_2 \\ \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_{zx})+\dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_{zy})+\dfrac{\partial}{\partial z}(\sigma_z)+F_3 \end{cases}$$

这是关于 $\vec{u}$ 的二阶线性方程组，如果在全空间 R_3 中求解，则还需给出初始条件

$$\vec{u}\big|_{t=0}=\vec{u}_0 \quad (\text{初位移})$$

$$\left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=\vec{v}_0 \quad (\text{初速度})$$

如果是在某一区域 $\Omega\subset R^3$ 中求解，还需给出边界条件而得一混合问题. 例如，给定 $\vec{u}$ 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的值.

如果 λ 和 μ 是常数，则运动方程组可为

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\ \nabla(\nabla\cdot\vec{u})+\vec{F}$$

这时还可根据向量分析的公式，引入适当的变换，把问题归结到标准的波动方程形式. 即设

$$\vec{F}=\nabla U+\nabla\times\vec{L}$$

$$\vec{u}=\nabla\Phi+\nabla\times\vec{A}$$

则不难验证，若 Φ 和 $\vec{A}$ 分别满足

$$\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\Delta\Phi+U$$

$$\rho\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu\Delta\vec{A}+\vec{L}$$

则 $\vec{u}$ 必满足弹性波运动方程组. 如果在全空间求解，则只要给出初值条件而独立地求解纯量波动方程的初值问题. 如果在有界区域中求解，则还需给出边界条件，但这时边界条件变为各分量之间的一个微分等式，这对完全解出方程组的定解问题带来很大的

困难. 由 Φ 所确定的振动称为纵波，Φ 为纵波的标量位势，由 $\vec{A}$ 所确定的振动称为横波，$\vec{A}$ 为横波的向量位势.

如果 $\mu=0$，这时方程大为简化，只有主应力，无切应力，且 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z$，令它们为 P 则运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\mathrm{grad}P+\vec{F}$$

其中 $P=\lambda\mathrm{div}\,\vec{u}$，这实际上就是流体小扰动下的运动方程. 这时若外加的源项 $\vec{F}$ 和初始位移 $\vec{u}_0$ 和初始速度 $\vec{v}_0$ 均为无旋向量时，则弹性波无横波，问题归结为纵波标量位势的波动方程，也就是说，这时纵波不会发生转换.

如果位移只在 x 的方向，且一切物理量均只依赖于 t 和 x，得一维弹性波方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+F$$

可视此为弹性杆的纵振动的方程，$u(x,t)$ 为纵向的微小位移，F 是外加的纵向力，为了确定其振动还要加初始条件和边界条件.

*1.2.6 流体波、声波方程和稳定的流场

设 t 为时间坐标，(x,y,z) 为空间坐标，用流体的速度 $\vec{v}(x,y,z,t)=(v_1,v_2,v_3)^T$、密度 $\rho(x,y,z,t)$ 和压强 $P(x,y,z,t)$ 作为表征理想流体在内力和外力作用下运动过程的物理量，因为在一般情况下流体是可压缩的，所以密度 ρ 和压强 P 是时间和空间的函数，根据质量守恒原理和牛顿第二定律可得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0 & \text{（连续性方程）}\\[2ex] \rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+\mathrm{grad}\,P=\vec{F} & \text{（运动方程）}\end{cases}$$

其中 $\vec{F}$ 是外加的体力. 这里有五个未知量，但还只有四个方程，所以是欠定型的，为此需再加一个方程. 在绝热等的条件下通常需再加一个状态方程

$$\rho = f(P)$$

其中 $f'(P) > 0$，f 是已知函数. 类似地，为了确定流体的运动还需加初始条件和边界条件. 但是从方程可看出，这已是一个很复杂的非线性方程组，其边界条件通常也是非线性的. 所以在有些情况下可以根据物理意义来简化问题，下面用小扰动线性化的典型方法把问题线性化，从而推出声波方程.

设流体只在其平衡状态下作微小的振动，在平衡状态下的压力为 P_0，密度为 ρ_0，为简单计设它们均为常数，这样将 $\rho - \rho_0$，$P - P_0$，$\frac{\partial \rho}{\partial t}$，$\frac{\partial P}{\partial t}$，$v_i$，$\frac{\partial v_i}{\partial x}$，$\frac{\partial v_i}{\partial y}$，$\frac{\partial v_i}{\partial z}$ 等等视为一阶小量，略去高阶小量，运动方程变为

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \text{grad } P = \vec{F}$$

添上高阶小量 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{v}$ 得

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{grad } P = \vec{F}$$

两边作散度并由连续性方程得

$$-\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \text{div}(\text{grad } P) = \text{div } \vec{F}$$

又由状态方程并略去高阶小量得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = f'(P_0) \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

从而得出

$$-f'(P_0) \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta P = \text{div } \vec{F}$$

这是标准的波动方程，称之为声波方程. 如果要消去 P 而保留 ρ，则由 $\rho = f(P)$，并略去高阶小量类似地可得

$$\Delta P = \frac{1}{f'(P_0)} \Delta \rho$$

从而得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{f'(P_0)} \Delta \rho = \operatorname{div} \vec{F}$$

它也称为声波方程.

如果讨论稳定的不可压缩均匀流体的无旋运动. 令 $\vec{v} = -\operatorname{grad} U$ ，则根据连续性方程得

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z^2} = 0$$

如果是有源情况，则得泊松方程，这和静电场的情况相似.

* 1.2.7 电报方程及定解条件

在电路理论中用电流强度 I 或电压 V 作为表征电磁过程的物理量，用集中在一些个别点上的电阻 R 、电感 L 和电容 C 等参数描述介质的特性，在此过程中只有唯一的时间变量是自变量，所遵从的是根据克希霍夫(Krichhoff)定律所得到的常微分方程. 但是，当在高频情况下讨论电磁波在时间空间的传播时，问题要复杂得多，此时表征的物理量是电场强度和磁场强度，描述介质特性的是介电系数，导电率和导磁率等，遵从的是马克斯威尔偏微分方程组. 但是研究高频电磁波沿着传输线在时间空间 (t, x) 中的传播时，问题可得到很大的简化，仍然可引进电流强度 I 和传输线同轴双线间的电压 V 等概念，且用它们作为表征此种电磁波传播过程的物理量，而用单位传输线的电阻 R 、电感 L 、电容 C 和电漏 G 来描述介质特性，但现在的这些参数一般已不是集中分布而是连续分布.

如图 1.4，把同轴传输线视作平行于 x 轴的双线，设 $V(x, t)$ 表示在时刻 t 同轴双线 x 处两线间的电压, $I(x, t)$ 表示时刻 t 同轴双线 x 处的电流强度. 在同轴双线中任取出 $[x, x+dx]$ 间的一段微元，得到一等效的 $C-R-L-G$ 电路，根据克希霍夫第一定律和第二定律(分别对应于运动方程和连续性方程)得

$$I(x, t)\, R\mathrm{d}x + \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} L\mathrm{d}x$$

$$+V(x+\mathrm{d}x,t)-V(x,t)=0$$

$$V(x,t)\,G\,\mathrm{d}x+\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}C\mathrm{d}x$$

$$+I(x+\mathrm{d}x,t)-I(x,t)=0$$

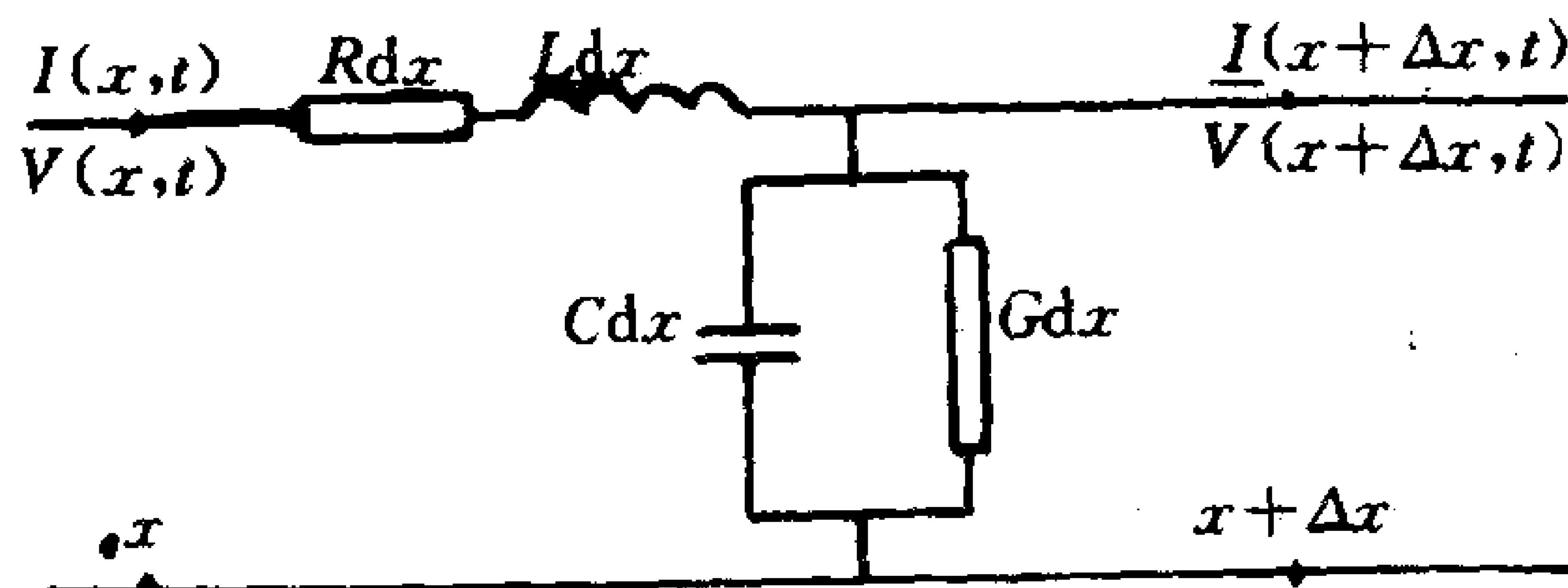


图 1.4

令 $\mathrm{d}x$ 趋于零取极限得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}+L\dfrac{\partial I}{\partial t}+RI=0\\[2mm]\dfrac{\partial I}{\partial x}+C\dfrac{\partial V}{\partial t}+GV=0\end{cases}$$

称之为电报方程组，利用求导和加减消去等变换可分别得出关于 $V(x,t)$ 和 $I(x,t)$ 完全相同的二阶方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-(LG+RC)\frac{\partial V}{\partial t}-RGV=0$$

和

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}-(LG+RC)\frac{\partial I}{\partial t}-RGI=0$$

称之为电报方程.

对于理想的情况，若没有损耗，即 $R=G=0$ 时，得标准的波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=0$$

讨论电报方程或电报方程组的问题，除了初始条件外，边界条件具有很重要的意义，要根据具体的物理条件，类似地取出端

点附近的一个小的微元应用克希霍夫第一定律和第二定律列出等式，然后再取小微元的长度趋于零取极限而得边界条件. 例如讨论区间 $[0, l]$ 上的传输线，设在 $x=0$ 端有一电动势为 $\varepsilon(t)$ 的电源，另一端 $x=l$ 是开路，在 $x=0$ 端取 $[0, \mathrm{d}x]$ 的一微元，根据克希霍夫第一定律和第二定律得

$$\begin{cases} I(0, t)\, R\mathrm{d}x + \dfrac{\partial I(0, t)}{\partial t} L\mathrm{d}x + V(\mathrm{d}x, t) - \varepsilon(t) = 0 \\ V(0, t)\, G\, \mathrm{d}x + \dfrac{\partial V(0, t)}{\partial t} C\mathrm{d}x + I(\mathrm{d}x, t) - I(0, t) = 0 \end{cases}$$

令 $\mathrm{d}x \to 0$ 得 $x=0$ 端的边界条件

$$V(0, t) = \varepsilon(t)$$

$$\frac{\partial I(0, t)}{\partial x} + C\frac{\partial V(0, t)}{\partial t} + G\, V(0, t) = 0$$

而后一个等式也就是表示电报方程组的第二个在 $x=0$ 端也成立. 类似地可得 $x=l$ 端的边界条件是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(l, t)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial I(l, t)}{\partial x} + G\, V(l, t) + C\dfrac{\partial V(l, t)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

另外，由于开路，显然有 $I(l, t) = 0$. 实际上由 $I(l, t) = 0$，可以推出 $\dfrac{\partial V(l, t)}{\partial x} = 0$. 常遇到的边界条件还有在 $x=l$ 端短路，这时 $V(l, t) = 0$，从而可以推出 $\dfrac{\partial I(l, t)}{\partial x} = 0$. 一般说来，如果在一端是由外加电动势 E，电阻 r 和电感为 λ 所关闭，则边界条件是 $V = E + rI + \lambda\dfrac{\partial I}{\partial t}$（当 $x=0$ 或 $x=l$ 时）.

1.3 二阶线性方程的分类和标准形式及特征的概念

1.3.1 两个自变量时的分类和标准形式，特征曲线

设方程

$$L[u]=a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0 \tag{1}$$

方程中含二阶导数的部分称为方程的主部，设 a_{ij} 不全为零，我们的目的是通过自变数的非奇异变换来简化方程的主部，同时用方程在此种变换下保持不变的性质对方程进行数学上的分类.

设作自变量的非奇异光滑变换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

未知函数 u 作为新的自变量 ξ, η 的函数仍记之为 $u(\xi,\eta)$，则方程变为

$$A_{11}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+A_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+B_1\frac{\partial u}{\partial \eta}+C_1u=0$$

其中，

$$
\left.\begin{aligned}
A_{11}(\xi,\eta)&=a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\\
A_{22}(\xi,\eta)&=a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\\
A_{12}(\xi,\eta)&=a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\\
&\qquad+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}
\end{aligned}\right\}\qquad(2)
$$

$A_1(\xi,\eta)$，$B_1(\xi,\eta)$，$C_1(\xi,\eta)$ 的表达式从略，如果令 $a_{12}=a_{21}$，$A_{12}=A_{21}$，则(2)式可以表示为

$$
\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial x}\\ \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix}\qquad(2')
$$

从而在自变量变换下由二阶项主部系数组成的对称矩阵恰是相合的关系，其变换矩阵是自变量变换的雅可比(Jacobi)矩阵

$$
\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix}
$$

其行列式不为零，所以数学上根据方程主部系数组成的对称矩阵 $(a_{ij}(x,y))$ 在非奇异相合变换下不变的性质对方程进行完全的分类，等价地就是根据二次型 $Q(\lambda)=\sum\sum a_{ij}(x,y)\lambda_i\lambda_j$ 在非奇异线性变换下不变的性质来进行分类. 又由于假设 a_{ij} 不全为零，而且只有两个自变量，所以只要根据二阶对称阵行列式的符号就可进行完全的分类. 同时所谓使方程得到某种简化和化为某种标准形式，也就是要根据关系式(2′)或(2)使主部对应的对称矩阵得到较简单的形式和化为某种标准形式.

记

$$
\Delta(x,y)=-\begin{vmatrix}a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y)\\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y)\end{vmatrix}=a_{12}^2-a_{11}a_{22}
$$

(i) **若** $\Delta(x, y) > 0$ **，则称方程** $L[u] = 0$ **在点** (x, y) **为双曲型，若在某一个区域** Ω **(或点集)中均有** $\Delta(x, y) > 0$ **，则称在此区域** Ω **(或点集)中** $L[u] = 0$ **为双曲型.**

(ii) **若** $\Delta(x, y) = 0$ **，则称方程** $L[u] = 0$ **在点** (x, y) **为抛物型，类似地定义在一个区域** Ω **(或点集)中** $L[u] = 0$ **为抛物型.**

(iii) **若** $\Delta(x, y) < 0$ **，则称方程** $L[u] = 0$ **在点** (x, y) **为椭圆型的，类似地定义在一个区域** Ω **(或点集)中** $L[u]$ **为椭圆型.**

显然 $a_{11} = a_{22} = 0$，$a_{12} \neq 0$ 时，或 $a_{12} = 0$，$a_{11} a_{22} < 0$ 时是双曲型的. a_{11}，$a_{12} = 0$，$a_{22} \neq 0$ 或 $a_{22} = 0$，$a_{12} = 0$，$a_{11} \neq 0$ 是抛物型的. $a_{12} = 0$，$a_{11}a_{22} > 0$ 时是椭圆型的. 在这些特殊的情况中方程的形式较为简单. 所以问题在于是否能把一般情况下的二阶线性方程，根据属于不同类型的区域，找到适当的自变量变换使方程变为这些特殊的或更简单的标准形式.

根据基本的关系式(2)，若能选取 $\xi(x, y)$，$\eta(x, y)$ 为一阶偏微分方程

$$a_{11}(x, y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{22}(x, y)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{3}$$

的解，则必然会有

$$A_{11}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) = 0, \quad A_{12}(\xi, \eta) \neq 0$$

而一阶偏微分方程(3)的解和常微分方程的解的关系有下列基本定理：**设** $\nabla \varphi(x, y) \neq 0$ **，则** $\varphi(x, y)$ **是(3)的解的充分必要条件是** $\varphi(x, y) = C$ **是一阶常微分方程**

$$a_{11}(x, y)(\mathrm{d}y)^2 - 2a_{12}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + a_{22}(x, y)(\mathrm{d}x)^2 \tag{4}$$

的通积分.

证明 若 $\nabla\varphi(x, y) \neq 0$，$\varphi(x, y) = C$ 是(4)的通积分，则对任意的 C，沿着积分曲线 $\varphi(x, y) = C$ 有 $\varphi_x \mathrm{d}x + \varphi_y \mathrm{d}y = 0$，代

入(4)有

$$a_{11}(\varphi_x)^2 + 2\,a_{12}\varphi_x\,\varphi_y + a_{22}\,\varphi_y^2 = 0$$

又由于C可以任意改变，积分曲线族$\varphi(x,\ y) = C$可以覆盖某一个区域Ω，故在此区域Ω上，上式恒成立，这就证明了充分性.又若$\nabla\ \varphi \neq 0$，$\varphi(x,\ y)$在区域Ω内满足一阶偏微化方程(3)，特别，沿着任意曲线$\varphi(x,\ y) = C$上的点$(x,\ y)$有$\varphi_x\,\mathrm{d}x + \varphi_y\,\mathrm{d}y = 0$，所以沿着曲线$\varphi(x,\ y) = C$必有

$$a_{11}(x,\ y)(\mathrm{d}y)^2 - 2\,a_{12}(x,\ y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + a_{22}(x,\ y)(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

这就证明了必要性，即$\varphi(x,\ y) = C$是(4)的通积分.

称常微分方程(4)为二阶线性偏微分方程(1) $L[u] = 0$ 的特征微分方程，称特征微分方程的积分曲线为 $L[u] = 0$ 的特征曲线.

(i) 若在区域Ω内，$\Delta(x,\ y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$，即$\Omega$内方程$L[u] = 0$是双曲型的，这时特征微分方程(4)一定可以分解为两个不同方向场的一阶常微分方程，从而有两族不同的特征曲线.

当$a_{11} = a_{22} = 0$，$a_{12} \neq 0$时，特征微分方程为$2\,a_{12}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0$，所以得$\mathrm{d}x = 0$和$\mathrm{d}y = 0$，这时坐标曲线族$x = c_1$和$x = c_2$是两族特征曲线，用$a_{12}(x,\ y)$除方程$L[u] = 0$的两端得标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + A_1(x,\ y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + B_1(x,\ y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + C_1(x,\ y)\,u = 0$$

当$a_{11} \neq 0$时，特征微分方程分解为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta(x,\ y)}}{a_{11}}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta(x,\ y)}}{a_{11}}$$

设它们的通积分分别为$\varphi_1(x,\ y) = c_1$和$\varphi_2(x,\ y) = c_2$，若作代换

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

则必然有 $A_{11}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) = 0$, $A_{12}(\xi, \eta) \neq 0$，方程变为

$$2A_{12}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + A_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + C_1(\xi, \eta)u = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + A_2(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_2(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + C_2(\xi, \eta)u = 0$$

称此为双曲型方程的第二种标准形式.

如果再作变换

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}(s + t) \\ \eta = \dfrac{1}{2}(s - t) \end{cases}$$

则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_3(s, t)\frac{\partial u}{\partial s} + B_3(s, t)\frac{\partial u}{\partial t} + C_3(s, t)u = 0$$

称之为双曲型方程的第一种标准形式或简称为标准形式.

(ii) 若在区域 Ω 内 $\Delta(x, y) = 0$，即在 Ω 内方程 $L[u] = 0$ 为抛物型的，这时特征微分方程(4)只能确定一个方向场，从而只有一族特征曲线.

若 $a_{11}(x,y) = 0$，这时必然有 $a_{12}(x,y) = 0$, $a_{22}(x,y) \neq 0$，其特征微分方程为 $(\mathrm{d}x)^2 = 0, x = c$ 是特征曲线族，这里方程 $L[u] = 0$ 必为

$$a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = 0$$

两边用 $a_{22}(x, y)$ 除，得标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C_1(x, y)u = 0$$

若 $a_{11}(x, y) \neq 0$，这时特征微分方程为

$$(a_{11}\mathrm{d}y - a_{12}\mathrm{d}x)^2 = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

设 $\varphi(x, y) = c_1$ 是特征方程的通积分，作函数代换

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

其中 $\psi(x, y)$ 是任意的一个光滑函数，使 $\left|\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right| \neq 0$，则必然有

$$A_{11}(\xi, \eta) = 0, \ A_{12}(\xi, \eta) = 0, \ A_{22}(\xi, \eta) \neq 0$$

方程变为

$$A_{22}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + A_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + C_1(\xi, \eta)u = 0$$

用 $A_{22}(\xi, \eta)$ 来除得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + A_2(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + B_2(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + C_2(\xi, \eta)u = 0$$

称它为抛物型方程的标准形式.

(iii) 若在区域 Ω 中 $\Delta < 0$，即在 Ω 中 $L[u] = 0$ 这椭圆型，这时必然 $a_{11}(x, y)\,a_{22}(x, y) > 0$，除 $\varphi(x, y) \equiv c$ 外一阶偏微分方程(3)无其它实值解，特征微分方程(4)无实的特征曲线. 这时由特征微分方程确定复的方向场而得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12}(x, y) \pm i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}(x, y)}$$

任取“+”或“−”号，设特征微分方程的复值通积分为

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\,\varphi_2(x, y) = C$$

可证 $\left|\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}\right| \neq 0$，且复值函数 $\varphi(x, y)$ 满足方程(3)，即

$$a_{11}(x, y)(\varphi_x)^2 + 2a_{12}(x, y)\varphi_x\varphi_y + a_{22}(x, y)\varphi_y^2 = 0$$

分别取实部和虚部得

$$\begin{cases} a_{11}\varphi_{1x}^2 + 2a_{12}\varphi_{1x}\varphi_{1y} + a_{22}\varphi_{1y}^2 = \\ \qquad\qquad a_{11}\varphi_{2x}^2 + 2a_{12}\varphi_{2x}\varphi_{2y} + a_{22}\varphi_{2y}^2 \\ a_{11}\varphi_{1x}\varphi_{2x} + a_{12}(\varphi_{1x}\varphi_{2y} + \varphi_{1y}\varphi_{2x}) + a_{22}\varphi_{1y}\varphi_{2y} = 0 \end{cases}$$

所以，若作变换

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

必有 $A_{11}(\xi, \eta) = A_{22}(\xi, \eta) \neq 0$，$A_{12}(\xi, \eta) = 0$，从而方程 $L[u]$ 变为

$$A_{11}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + A_{22}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + A_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} + B_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\eta} + C_1(\xi, \eta)u = 0$$

用 $A_{11}(\xi, \eta)$ 除得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + A_2\frac{\partial u}{\partial\xi} + B_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + C_2 u = 0$$

称之为椭圆型方程的标准形式.

特别，对于常系数二阶线方程

$$L[u] = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0$$

其中 a_{ij} 不不全为零的常数，a_1，b_1，c 为常数. 根据上述的讨论立即可知：

(i) 当 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ 时，在平面 R^2 中方程为双型，两特征线族均为直线族，总可用自变量的非奇异线变换使方程变为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a_2\frac{\partial u}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + c_2 u = 0$$

（第二种形式的标准形）

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a_3\frac{\partial u}{\partial s}+b_3\frac{\partial u}{\partial t}+c_3 u=0$$

（第一种标准）

其中系数仍均为常数．如果再作未知函数的变换

$$u(s,t)=e^{-\frac{1}{2}(a_3 s-b_3 t)}v(s,t)$$

则变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+c_4 v=0$$

(ii) 当 $\Delta=0$ 时，在 R^2 中方程均为抛物型，只有一族特征曲线，而且是直线族，总可作自变量的非奇异线性变换使方程变为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a_2\frac{\partial u}{\partial \xi}+b_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+c_2 u=0$$

如果再作未知函数的代换

$$u(\xi,\eta)=e^{-\frac{b_2}{2}\eta}\cdot v(\xi,\eta)$$

则方程变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+a_3\frac{\partial v}{\partial \xi}+c_3 v=0$$

(iii) 当 $\Delta<0$ 时，在 R^2 中方程为椭圆型，无实特征曲线，总可作自变量的非奇异线性变换，使方程变为标准形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a_2\frac{\partial u}{\partial \xi}+b_2\frac{\partial u}{\partial \eta}+c_2 u=0$$

若再作未知函数的代换

$$u(\xi,\eta)=e^{-\frac{1}{2}(a_2\xi+b_2\eta)}v(\xi,\eta)$$

则可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+c_3 v=0$$

例 1　特里苛米(Tricomi)方程

$$y\,u_{xx}+u_{yy}=0$$

$\Delta(x,y)=-y$，特征微分方程为

$$(\mathrm{d}x)^2+y(\mathrm{d}y)^2=0$$

当 $y<0$ 时，方程为双曲型，特征曲线族为

$$x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=c_1$$

和

$$x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=c_2$$

作代换

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}\\[2mm]\eta=x+\dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}\end{cases}$$

方程变为标准形式

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,\quad \xi<\eta$$

当 $y>0$ 时，方程为椭圆型，特征方程为

$$(\mathrm{d}x+i\sqrt{y}\,\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x-i\sqrt{y}\,\mathrm{d}y)=0$$

取 $\mathrm{d}x+i\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=0$，它的复值通积分为

$$x+i\,\frac{2}{3}\,y^{3/2}=c$$

作变换

$$\begin{cases}\xi=x\\[2mm]\eta=\dfrac{2}{3}\,y^{3/2}\end{cases}$$

方程变为标准形式

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{3\eta}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,\ \eta>0$$

如果在包含 x 轴的某一个区间在内的一个区域 Ω 中来讨论特里

苛米方程的定解问题，则它成为一个混合型的偏微分方程的问题，此种问题的研究在高速空气动力学中有很大意义．特里苛米方程的推广是

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

其中 m 是正的奇数，类似地可分别求出它在双曲型区域和椭圆型区域的标准形．

1.3.2 多个自变量时的分类和特征曲面

设
$$L[u]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=0 \tag{5}$$

是 n 个自变量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 的二阶线性偏微分方程，其中 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$，$a_{ij}(x)$ 不全为零.

设 $\xi=\xi(x)$ 为自变量的非奇异光滑变换，记 $\dfrac{\partial(\xi_1\cdots\xi_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}=\left(\dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\right)$ 为变换的雅可比(Jacobi)矩阵，其行列式为 J，$J\neq 0$．在新的自变量 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$ 下方程(5)变为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_i}+c(\xi)u=0$$

其中

$$A_{ij}=A_{ji}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{st}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_s}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_t} \tag{6}$$

或者写成矩阵的形式

$$(A_{ij})=\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(a_{ij})\left(\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right)^T \tag{6'}$$

据此，和两个自变量的情况相似，数学上根据方程(5)的主部系数组成的 n 阶对称阵 $A=(a_{ij}(x))$ 在非奇异相合变换下不变的性

质对方程进行完全的分类，也就是根据二次型 $Q(\lambda)=\sum\sum a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ 在非奇异线性变换下不变的性质来进行分类.

(i) **若 $Q(\lambda)$ 为非退化且是不定的，即 A 是非奇异的且其特征值的符号不全相同，则称方程(5)在点 x 为双曲型的. 若再设 $Q(\lambda)$ 的正惯性指数或负惯性指数恰为 $n-1$ 时，即 A 恰有 $(n-1)$ 个正特征值或负特征值时，则称方程(5)在点 x 为狭义双曲型的，如果在 R^n 中的一个区域或点集 Ω 中每一点，方程(5)均为双曲型或狭义双曲型，则称在 Ω 中方程为双曲型或狭义双曲型的.**

(ii) **若 $Q(\lambda)$ 为退化二次型，即 A 为奇异方阵，亦即 A 有零特征值，则称方程(5)在点 x 为抛物型的. 若再设 $Q(\lambda)$ 的正惯性指数或负惯性指数恰为 $n-1$，即再设 A 有 $(n-1)$ 个非零同号的特征值，则称方程(5)在点 x 为狭义抛物型的. 类似地定义在一个区域或点集 Ω 中方程为抛物型或狭义抛物型.**

(iii) **若 $Q(\lambda)$ 为正定或负定，即 A 具有 n 个非零同号的特征值，则称方程(5)在点 x 为椭圆型的，类似地定义在一个区域或点集 Ω 中方程为椭圆型.**

由此显然可知，若设 $a_{ij}=0(i\neq j)$，则当 a_{ii} 全不为零且其中恰有 $n-1$ 个同号时，则为狭义双曲型，当 a_{ii} 中恰有一个为零，其余 $n-1$ 个同号时，则为狭义抛物型，若 a_{ii} 同号时，则为椭圆型方程. 特别，在 R^{n+1} 中，n 维波动方程为狭义双曲型方程，n 维热传导方程为狭义抛物型方程. 在 R^n 中 n 维调和方程或泊松方程为椭圆型. 在有的物理问题中也会出现非狭义的双曲型或抛物型的偏微分方程，例如

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}=0$$

它显然是 R^{n+m} 中的双曲型方程，当 $n\geqslant 2$，$m\geqslant 2$ 时它是非狭义双曲型，一般称之为超双曲型方程.

如上所述，若进行自变量的非奇异光滑变换 $\xi=\xi(x)$，则在新的自变量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 下未知函数对每一个 ξ_i 的二阶

导数的系数为

$$A_{ii} = \sum_t \sum_s a_{st}(x) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} \frac{\partial_i \xi_i}{\partial x_t},$$

据此，引入特征曲面的概念：**设一光滑曲面** $\varphi(x) = 0$，$\nabla\varphi \neq 0$，**若在曲面** $\varphi(x) = 0$ **上的点处满足**

$$\sum \sum a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$$

则称 $\varphi(x) = 0$ **为方程**(5) $L(u) = 0$ **的特征曲面**.

若 $\varphi(x) = c$ 是方程(5)的一特征曲面族，其中 c 是任意常数，则 $\varphi(x)$ 在某一个区域 Ω 内必满足一阶偏微分方程

$$\sum \sum a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \tag{7}$$

反之，若 $\nabla\varphi \neq 0$，$\varphi(x)$ 是上述一阶偏微分方程在某一个区域 Ω 上的一个解，则曲面族 $\varphi(x) = c$ 必是方程(5)的特征曲面族.

例 1 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$

对应的偏微分方程(7)为

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

不难验证

$$a^2(t - \tau)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \eta_i)^2$$

为 n 维波动方程的一个特征曲面，它是在 (x, t) 空间中，以点 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \tau)$ 为顶点的锥面. 称之为通过点 $(\eta_1, \cdots, \eta_n, \tau)$ 的特征锥面. 更一般些，

$$(t - \tau)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \eta_i)^2}{\alpha_i^2}$$

为方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

通过点 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \tau)$ 的特征锥面，其中各 α_i 为正的常数.

例 2 $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$

对应的偏微分方程(7)为

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

显然 $t = c$ 是 n 维热传导方程的特征平面族.

例 3 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$

对应的偏微分方程(7)为

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

显然，除 $\varphi(x) \equiv c$ 外，此偏微分方程无任何其它的解，所以，n 维调和方程无任何的特征曲面.

例 4 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 其中 $(a_{ij}(x))$ 在 R^n 中的区域 Ω 内每一点均为正定对称阵. 方程在 R^{n+1} 中的区域 $\Omega \times R$ 内是狭义双曲型的. 若设 $t = \omega(x)$ 为方程的特征曲面，则 $\omega(x)$ 必满足一阶偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 1$$

特别，若 $a_{ij}(x) = 0(i \neq j)$，$a_{ii}(x) = a^2(x)$，则得

$$\sum_{i=1}^{n} a^2(x) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 1$$

此为著名的光程方程.

1.3.3 多个自变量时常系数方程的标准形式

对于 $n > 2$ 时多个自变量的二阶变系数线性方程

$$L^{*}[u] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x)\, u = 0 \qquad (8)$$

一般说来，不能找到一个非奇异的自变量的变换，使在同一个型的小区域 Ω 内方程变为标准形式，但对于常系数的情况，根据对称矩阵和二次型化为标准形的理论和方法，则可找到自变量的非奇异线性变换，使方程变为标准形.

设方程(8)为常系数的，则 $A=(a_{ij})$ 构成一个以常数为元素的 n 阶实对称非零的矩阵，则存在一个非奇异的矩阵 C，使

$$CAC^T=\begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{p} & & & \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{q} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r=p+q$，$|p-q|$ 均为在非奇异相合变换下的不变量.

如果作自变量的非奇异线性变换 $\xi=Cx$，则 $C=(c_{ij})=\dfrac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ 是变换的雅可比矩阵，根据前边所述二阶线性方程自变量变换的一般理论，方程必变为标准形式

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2}-\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j}+\sum_{i=1}^{n}d_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}+\mathrm{e}u=0$$

若再作未知函数的变数代换

$$u(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{p}d_i\xi_i+\frac{1}{2}\sum\limits_{p+1}^{p+a}d_i\xi_i}\cdot v(\xi)$$

则方程变为

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2}-\sum_{p+1}^{p+q}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_j^2}+\sum_{p+q+1}^{n}f_i\frac{\partial w}{\partial \xi_i}+g\,v=0$$

特别，对于狭义的双曲型方程，经过上述变换必能变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} - a\frac{\partial v}{\partial \xi_n} + bv = 0$$

对于狭义抛物型方程必能变为

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + a\frac{\partial v}{\partial \xi_n} + bv = 0$$

对于椭圆型方程必能变为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + bv = 0$$

对于变系数的二阶线性方程(8)，对于固定的一个点 x_0，则主部系数构成的对称阵 $(a_{ij}(x_0))$ 是一常数为元素的矩阵，所以存在一个线性变换 $\xi = Cx$，使方程在点 $\xi_0 = Cx_0$ 成为标准形式，不同的点 x_0 有不同的这种变换，这种方法称为固定系数法，它在变系数线性方程的研究中也具有一定的意义.

1.4 叠加原理和齐次化原理

1.4.1 叠加原理(独立作用原理)

在一个定解问题中，如果泛定方程和各定解条件均为线性的，则称为线性定解问题，它的一般形式为

$$\begin{cases} L[u] = f, \quad (x_1\cdots x_n)^T \in \Omega, \text{泛定方程} \\ \left.\begin{array}{l} l_1(u)|_{s_1} = g_1 \\ \vdots \\ l_k(u)|_{s_k} = g_k \end{array}\right\} \end{cases}$$

其中 $L[u]$ 是定义在区域 Ω 内的线性微分算子，$l_i(u)$ 是定义在 Ω 的某一部分边界 s_i 上的线性微分算子，通常 $l_i(u)$ 是一个比 $L[u]$ 低阶的微分算子，甚至 $l_i(u)$ 也可以是零阶的，即 $l_i(u) = u$，f 为 Ω 内的已知函数，g_i 是 s_i 上的已知函数. 例如

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), t > 0, 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ \left.\left(\alpha_1 u - \beta_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = \mu_1(t) \\ \left.\left(\alpha_2 u + \beta_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

是线性问题，本章所列出的三个典型方程的各种典型的定解问题均为线性问题，对于线性问题成立着线性叠加原理. 此原理对于线性问题的研究起基本作用. 为简计，下面把线性问题中的每一个线性微分等式记为 $L[u] = f$，这里它可以表示泛定方程，也可以表示定解条件. 线性叠加原理可叙述为

(i) **若 u_i 满足 $L[u_i] = f_i$，则**

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

(ii) **若 u_i 满足 $l[u_i] = f_i$，则**

$$L\left[\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

(iii) **若 $u(x, \xi)$ 满足 $L[u(x, \xi)] = f(x, \xi)$，ξ 是参变数，设 V_ξ 是 ξ 的变化范围，V_ξ 可以是 R^n 中的一个区域，也可以是 R^n 中的一曲面或一曲线等，则**

$$L\left[\int_{V_\xi} a(\xi) u(x, \xi) d V_\xi\right] = \int_{V_\xi} a(\xi) f(x, \xi) d V_\xi$$

其中积分是对参数 ξ 进行，它可以表示体积分，也可以表示面积分或线积分，要看 ξ 的变化范围 V_ξ 而定，$a(\xi)$ 是任意的函数.

当然，在应用叠加原理(ii)和(iii)时，应该分别要求使求和号或积分号与微分算子 L 可以进行交换，从经典的观点，这种可以进行交换的条件较强. 但是在某些推广的意义下，这种交换常常是可以的，也就是说，当我们进行某些形式运算时，从经典的意

义是不能进行的，但在推广了的意义下则仍可以进行.

特别，对于齐次方程或齐次定解条件 $L[u]=0$，如果 $L[u_i]=0$ 时，则 $L\left[\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i\right]=0$，如果 $L[u(x,\xi)]=0$ 时，则

$$L\left[\int_{V_\xi} a(\xi)\, u(x,\xi)\, dV_\xi\right]=0$$

如果从物理意义上来解释，一个线性定解问题中，泛方程的右端函数 $f(x)$ 和各定解条件的函数 g_i 可视为是一些外加的源，叠加原理表示，许多源共同作用的结果等于各个源独立作用的结果的叠加，所以，线性叠加原理又称为独立作用原理. 线性叠加原理是线性问题和非线性问题最本质的差别. 对于有些非线性问题也存在某种形式的非线性叠加原理，发现非线性叠加原理，对于非线性问题的研究具有重要意义.

例 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+3xy+y^2, \quad x^2+y^2<R^2 \\ u|_{x^2+y^2=R^2}=xy \end{cases}$$

根据叠加原理，可把上述问题分解为两个更简单的问题，即 $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$，其中

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0 \\ u_1|_{x^2+y^2=R^2}=xy \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=x^2+3xy+y^2 \\ u_2|_{x^2+y^2=R^2}=0 \end{cases}$$

又因 $u_0=\dfrac{1}{12}(x^4+6x^3y+y^4)$ 是非齐次方程的一个特解，若设 $u(x,y)=u_0(x,y)+\omega(x,y)$，根据叠加原理，$\omega(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=0$$

$$\omega|_{x^2+y^2=R^2} = x\,y - \frac{1}{12}\,(x^4 + 6\,x^3\,y + y^4)$$

例 2　设 $z = x + y\,i$ 为复变量，则 z^n 的实部和虚部均是满足二维调和方程的多项式，如果用极坐标 (r,φ)，即 $r^n\cos n\varphi$，$r^n\sin n\varphi$ 均满足二维调和方程，根据叠加原理，

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, r^n \cos n\,\varphi + b_n\, r^n \sin n\,\varphi)$$

也满足二维调和方程.

例 3　令

$$u(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (x,\ y,\ z) \neq (\xi,\ \eta,\ \zeta)$$

当参数 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 在 R^3 中的区域 V 中变化时，根据叠加原理

$$u(x,\ y,\ z) = \iiint\limits_V \frac{\rho(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{r} \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\xi$$

当 $(x,\ y,\ z)$ 在区域 V 外时满足三维调和方程．根据位势理论或静电学中的物理意义可知，当 $(x,\ y,\ z) \in V$ 时，$u(x,\ y,\ z)$ 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\ 4\pi\rho(x,\ y,\ z)$$

如果 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 在 R^3 中的一闭曲面 S 上变化，若令

$$v(x,\ y,\ z) = \iint\limits_S \frac{\rho(\zeta,\ \rho,\ \zeta)}{r}\ \mathrm{d}s$$

根据迭加原理，当 $(x,\ y,\ z)$ 在 S 围成的内部区域或外部区域，$v(x,\ y,\ z)$ 均满足调和方程.

1.4.2　齐次化原理(冲量原理)

在线性常微分方程中，用常数变易法可通过齐次方程的解来

构造出非齐次方程的解，通过齐次方程初值问题的解来构非齐次方程初值问题的解. 可以把此种方法推广到线性发展偏微分方程的初值问题和混合问题. 所谓发展方程，物理上的意义是其中必有一个自变量是时间变量，对时间变量要提初值条件，最典型的是波动方程和热传导方程中，t 变量是时间，对它提初始条件. 数学上是要把其中的一个自变量视为时间变量的作用，对它必提相应的初始条件，从而构成发展方程的初值问题或混合问题.

定理一 线性常微分方程初值问题的齐次化原理.

设

$$\begin{cases} L[x(t)] = \dfrac{d^n x}{d t^n} + a_{n-1}(t)\dfrac{d^{n-1} x}{d t^{n-1}} + \cdots + a_0(t)\, x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

如果 $\omega(t;\tau)$ 满足

$$\begin{cases} L[\omega(t;\tau)] = 0 \quad t > \tau \\ \omega|_{t=\tau} = 0, \cdots, \left.\dfrac{d^{n-2}\omega}{d t^{n-2}}\right|_{t=\tau} = 0, \left.\dfrac{d^{n-1}\omega}{dt^{n-1}}\right|_{t=\tau} = f(\tau) \end{cases}$$

则

$$x(t) = \int_0^t \omega(t;\tau)\, d\tau$$

证明 因为

$$\frac{d^k x(t)}{d t^k} = \int_0^t \frac{d^k \omega(t_j, \tau)}{d t^k} d\tau, \ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \int_0^t \frac{d^n \omega(t_j, \tau)}{dt^n} d\tau + \left.\frac{d^n \omega(t_j, \tau)}{d t^{n-1}}\right|_{t=\tau}$$

$$= \int_0^t \frac{d^n \omega(t_j, \tau)}{d t^n} d\tau + f(t)$$

所以

$$\left.\frac{d^k x(t)}{d t^k}\right|_{t=0} = 0, \ k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$$

$$L[x(t)] = \int_0^t L[\omega(t;t)]d\tau + f(t) = f(t)$$

这样就证明了定理 1. 可给此定理以物理的解释，当 $n=2$ 时，把 t 视为时间，$x(t)$ 视为单位质量的质点直线运动的位移，$f(t)$ 是外加的力，那么在很小的时间区间 $[\tau, \tau+d\tau]$ 内，外力产生的冲量为 $f(\tau)d\tau$，由于质量为一，此冲量等于速度，$f(\tau)$ 为 τ 时刻的瞬时冲量密度，所以由此冲量在 t 时刻 $(t>\tau)$ 所引起的位移必然是 $\omega(t;\tau)\,d\tau$. 根据线性叠加原理（独立作用原理），在外力 $f(t)$ 的作用下，在时刻 t 所引起的位移 $x(t)=\int_0^t \omega(t;\tau)\,d\tau$. 正因为如此，齐次化原理又称为冲量原理.

定理二 线性发展偏微分方程初值问题的齐次化原理.

设

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = L[u] + f(x,t),\ t>0,\ x\in R^n \\ u|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其中 $L[u]$ 是线性偏微分算子，它含的关于 t 的偏导数最多是 $m-1$ 阶. 如果 $\omega(x,t;\tau)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m \omega(x,t;\tau)}{\partial t^m} = L[\omega(x,t;\tau)] \qquad t>\tau,\ x\in R^n \\ \omega|_{t=\tau}=0,\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=0,\ \cdots,\ \dfrac{\partial^{m-2}\omega}{\partial t^{m-2}}\Big|_{t=\tau}=0 \\ \qquad \dfrac{\partial^{m-1}\omega}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

则

$$u(x,t) = \int_0^t \omega(x,t;\tau)d\tau$$

证明 因为

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}=\int_0^t \frac{\partial^k \omega(x,t;\tau)}{\partial t^k}\mathrm{d}\tau,\ k=0,1,\cdots,m-1$$

$$\frac{\partial^m u(x,t;\tau)}{\partial t^m}=\int_0^t \frac{\partial^m \omega(x,t;\tau)}{\partial t^m}\mathrm{d}\tau+\left.\frac{\partial^{m-1}\omega}{\partial t^{m-1}}\right|_{\tau=t}$$

$$=\int_0^t \frac{\partial^m \omega(x,t;\tau)}{\partial t^m}\mathrm{d}\tau+f(x,t)$$

$$\frac{\partial^{k+\alpha_1+\cdots+\alpha_n} u}{\partial t^k\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\int_0^t \frac{\partial^{k+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\omega}{\partial t^k\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\mathrm{d}\tau,\ k<m$$

所以

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad k=0,1,\cdots,m-1$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}-L[u]=\int_0^t\left\{\frac{\partial^m \omega}{\partial t^m}-L[\omega]\right\}\mathrm{d}\tau+f(x,t)=f(x,t)$$

关于线性发展偏微分方程的混合问题也成立着相类似的齐次化原理，其对应的边界条件均为齐次线性边界条件，其证明完全类似.

例 1
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a^2x(t)=f(t)\\ x(0)=x'(0)=0\end{cases}$$

根据齐次化原理可得

$$x(t)=\int_0^t\frac{\sin a(t-\tau)}{a}f(\tau)\,d\tau$$

例 2
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)=,\ t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

根据线性叠加原理和齐次原理及达朗贝尔公式可得

$$u(x, t) = \frac{\varphi(a - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi$$

除了关于线性方程的叠加原理和齐次化原理外，对于常系数线性齐次方程还具有下列显然的性质：若 $u_0(x)$ 是常系数线性齐次方程的一个解，则 $u_0(x - x_0)$ 和 $\frac{\partial u_0}{\partial x_i}$ 仍为方程的解，即在自变量的平移变换下方程不变，只要方程的一个解足够光滑，则此解的偏导数仍然是方程的解. 以上这些关于线性方程的一般原理和性质，在今后的讨论中经常应用. 例如，在上例 2 中就直接应用了常系数方程在自变量的平移下不变的性质.

** 1.5 Cauchy、Kowalevski 定理和 Holmgren 定理

定理一 Cauchy 定理. 设

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = f(x)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

若 $P_i(x)$，$f(x)$ 在 $|x - x_0| < R$ 内解析，即它们均可以在点 x_0 展成泰勒级数，且级数的收敛半径至少为 R，则上述初值问题存在着唯一的解析解

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < R$$

显然 $y^{(k)}(x_0)$ 唯一地由初始条件和方程递推地确定，所以解析解的唯一性立即得证，另外可以用优级数的方法证明上述级数的收敛性，证明从略，从而定理一得证.

定理二 Cauchy 定理. 设

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

若 f 是所含变元的在点 $(x_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 附近的解析函数，则在 x_0 点附近，上述非线性方程存在唯一的解析解

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

和线性方程情况下的 Cauchy 定理类似，$y^{(k)}(x_0)$ 可由初始条件和方程递推地确定，同时可用优级数的方法证明上述级数在一个小的邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内收敛，从而证明定理二，但和线性方程的情况不同，在此所得的幂级数解是局部的，要想得到更大范围内的解，通常要用解析延拓的方法.

定理三 Cauchy-Kowalevski 定理. 为简计，下面以两个自变量的二阶方程来叙述此定理，对于多个自变量高阶方程的情况是类似的. 设初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(x, t, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \end{cases}$$

$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在 x_0 点附近解析，由此可确定得

$$\frac{\partial^n u(x_0, 0)}{\partial x^n} = \varphi^{(n)}(x_0), \qquad \frac{\partial^{n+1} u(x_0, 0)}{\partial x^n \partial t} = \psi^{(n)}(x_0)$$

又设 f 是所含变元在点 $(x_0, 0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0), \psi(x_0), \psi'(x_0), \varphi''(x_0))$ 附近的解析函数，则所设初值问题在 $(x_0, 0)$ 附近存在唯一的解析解

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!k!} \frac{\partial^{n+k} u(x_0, 0)}{\partial x^n \partial t^k}(x - x_0)^n t^k$$

和常微分方程时的定理二的情况类似，$u(x, t)$ 在点 $(x_0, 0)$ 的各阶偏导数的值可以由初始条件和方程唯一的递推地确定，且

也可用优级数法证明上述所得级数在 $(x_0, 0)$ 附近的一个小邻域内收敛，从而就可证明了此定理.

定理四 Holmgren 唯一性定理. 设

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} = L[u] + f(x, t) \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \cdots \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = \varphi_{m-1}(x) \end{cases}$$

其中 $L[u]$ 是具有解析系数的线性微分算子，且所含的关于 t 的偏导数最多是 $m-1$ 阶，且设 $t=0$ 不是方程的特征线(面)，则上述初值问题的古典解唯一.

此定理回答了很一般的线性偏微分方程初值问题的唯一性，特别，调和方程初值问题的解是唯一的. 本定理也不进行具体的证明.

定理三和定理四还可以推广到很一般的关于偏微分方程组初值问题的情况，其具体含义不难理解，应用时也便于操作.

* * * * * * * * * * *

本章论述了偏微分方程问题的某些基本概念和某些一般性的理论，论述了偏微分方程的实际意义和从实际问题归结到偏微分方程定解问题的过程. 这当中的一些概念、原理和定理与方程的类型没有关系，和常微分方程的情况有一定相似，对具体问题的讨论有指导意义. 但是应该强调指出，由于自变量是在高维空间中变化，其变化的区域更为复杂，定解条件有更多的形式，使得偏微分方程的问题表现出和常微分方程问题有很大的不同，例如，二阶线性偏微分方程定解问题的正确提法就和方程的型有很大关系，不同型的方程解的性质将会有很大的区别，特征曲面或特征曲线的情况等也将不同；又如，一方面一般说来线性方程的通解包含的元素比常微分方程的情况要多得多，但是一般很难找到通解的较为明确的表达式，另外近代偏微分方程的理论研究发

83

现了一些很奇特的现象，有一些系数和右端都很光滑的线性方程，即使在一个很小的邻域中竟连一个解都不存在．正因为如此，偏微分方程的研究方法和常微分方程有许多不同，在今后的讨论中将更多地采取具体问题具体分析的方法．

习 题 一

内容包括：方程的特解，方程的通解，定解问题的解，特征曲线，特征曲面，方程的标准形和简化，定解问题的物理意义．

1. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$r\neq 0$，求下列方程指定形式的特解：

(1) $\Delta_3 u=0$，$u=u(r)$．

(2) $\Delta_3 u+k^2 u=0$，$u=u(r)$．

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta_3 u=0$，$u=e^{i\omega t}R(r)$．

2. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$r\neq 0$

(1) $\Delta_2 u=0$，求 $u=u(r)$．

(2) $\Delta_2 u+k^2=0$，求 $u=u(r)$ 所满足的常微分方程．

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta_2 u=0$，$u=e^{i\omega t}R(r,\omega)$，求 $R(r,\omega)$ 所满足的常微分方程．

(4) $\Delta_3 u=0$，$u=e^{i\omega z}R(r,\omega)$，求 $R(r,\omega)$ 所满足的常微分方程．

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta_3 u=0$，$u=e^{i\omega t}e^{i\lambda z}R(r)$，求 $R(r)$ 所满足的常微分方程．

(6) 设 (r,θ) 为极坐标，$\Delta_2 u+k^2 u=0$，$u=\cos n\theta\,R(r)$，求 $R(r)$ 所满足的常微分方程．

3. 设 (r,θ,φ) 为球坐标．

(1) $\Delta_3 u$，$u=R(r)\sin\theta\cos\varphi$，求 $R(r)$ 所满足的常微分方

程.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_3 u = 0$, $u = e^{-i\lambda^2 t} \sin\theta \cos\varphi R(r)$，求 $R(r)$ 满足的常微分方程.

4. 求下列方程的通解：

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial y} + a(x, y) u = 0.$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial z} + a(x, y, z) u = 0.$

(3) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$，求通解 $u = u(x, y)$.

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x) \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

5. 求下列方程的特征线族，化方程为标准形并求方程的通解：

(1) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ (xy \neq 0).$

(2) $3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

6. 化方程为标准形式：

(1) 分别在区域 $y > 0$ 和 $y < 0$ 内化方程

$$y^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

为标准形.

(2) 用自变量的线性变换，化方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial z} + 2u = 0$$

为标准形.

7. 作未知函数的线性变换，使下列二阶方程化为不含一阶导数项的线性方程：

(1) $y'' + p(x)y' + \theta(x)y = 0.$

(2) $\lambda_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x) \dfrac{\partial u}{\partial y} + b(y) \dfrac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = 0$

其中 λ_1，λ_2 是非零常数.

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x-y)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x, y) u = 0.$

8. 讨论下列定解问题的适定性

(1)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + a(x, y) u = 0, \quad y > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 一阶连续，$a(x, y)$ 连续.

(2)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0, x - t < 0, x + t > 0 \\ u|_{x-t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x+t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 二阶连续，$\varphi(0) = \psi(0)$.

9. (1) 验证锥面 S：$(t-t_0)^2 - \frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 0$，是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

的特征曲面.

(2) 验证平面族 $t = c$ 是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的特征曲面族.

10. 设一均匀的半径为 R 的球体置于空间某一环境中冷却，球体的密度，比热和热传导系数分别为 ρ，c，k，球体表面和环境的热交换系数为 h，环境的温度分布只是时间 t 的函数 $f(t)$，球体的初始温度为 $\varphi(r)$，其中 r 是球内的点到球心的距离，试列出球体的温度分布 $u(r, t)$ 所满足的定解问题.

11. 设一均匀的长为 l 的圆柱形细杆，中心轴线为 x 轴的区间 $[0, l]$，截面圆的半径为 r，杆的密度，比热和热传导系数分别为 ρ，c 和 k，设杆的外界环境的温度只是时间 t 的函数 $f(t)$，杆

的表面(包括侧面和两底面)和环境的热交换系数为 h，杆上各点的初始温度为 $\varphi(x)$，试列出杆的温度分布 $u(x, t)$ 所满足的定解问题.

12. 设有一长为 l 的均匀和完全柔软的弦作微小的在同一个平面的横振动，其平衡位置是 x 轴的区间 $[0, l]$，u 表示横向位移，设弦的线密度为 ρ，张力的大小为 T，不计重力但计阻力，阻力的大小和位移速度成正比，比例系数为 R，设初始位移为 $\varphi(x)$，初始位移速度为 0，设在 $x=0$ 端固定，在 $x=l$ 端有一弹性强度为 k 的弹性支撑，试列出弦的位移 $u(x, t)$ 所满足的定解问题.

2 通解法和球面平均法

2.1 通 解 法

由方程的通解来确定出定解问题解的方法为通解法. 在常微分方程中这是很一般的方法. 历史上也试图把它作为偏微分方程问题的一个一般方法，但研究发现，由于自变量个数的增加，问题变得很困难，尤其是对于高阶方程更是这样，一方面在一般情况下很难找到通解较为明确的表达形式，而且即使找到通解，一般也很难由定解条件确定出定解，所以在解偏微分方程的问题时主要采取直接分析求解各类定解问题的方法. 但是通解法对于一阶线性方程和某些特殊的高阶方程的定解问题还是行之有效的，尤其是针对一维波动方程的行波法有很广泛的应用.

一般说来，一阶偏微分方程的通解包含有一个任意函数，二阶偏微分方程的通解包含有两个任意函数，而任意函数自变量的个数比偏微分方程中的自变量减少了一个，所以两个自变量的偏微分方程的通解中包含的任意函数是一元函数，相对而言较易处理一些.

2.1.1 两个自变量一阶线性方程的通解法

设

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1}$$

其中 $a(x, y)$，$b(x, y)$ 不全为零，最简单的情况是 $a(x, y)=0$，则 $u=f(x)$ 给出了方程(1)的通解. 对于一般的情况总可用自变

量的非奇异变换把方程变为这种最简单的方程，其处理方法和对于两个自变量二阶线性双曲型方程标准化的方法类似. 称

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,\ y)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,\ y)} \text{ 或 } a(x,\ y)\mathrm{d}y-b(x,\ y)\mathrm{d}x=0 \quad (2)$$

为一阶偏微分方程(1)的特征方程，称它的积分曲线为方程(1)的特征线.

不难证明，若 $\varphi(x,\ y)=c$ 是特征方程(2)的通积分，则 $u=\varphi(x,\ y)$ 一定满足方程(1)，即

$$a(x,\ y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

事实上，因为沿着特征线 $\varphi(x,\ y)=c$ 有

$$a(x,\ y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

又由于 c 可以任意的改变，所以在一个区域中也恒有

$$a(x,\ y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

设 $\varphi(x,\ y)=c$ 是特征方程(2)的通积分，则作自变量的非奇异变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,\ y)\\ \eta=\psi(x,\ y)\end{cases}$$

其中 $\psi(x,\ y)$ 是任意选定的，则方程(1)变为

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$$

所以 $u=f(\xi)$ 即 $u=f(\varphi(x,\ y))$ 给出方程(1)的通解.

如果曲线 Γ 不是(1)的特征曲线，则可以由通解来确定初始数据给在 Γ 上的初值问题的解，例如，设 $b(x,\ y)\neq 0$，则 $y=0$ 不是(1)的特征曲线，则可提初值问题

$$\begin{cases}a(x,\ y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,\ y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ u(x,\ 0)=g(x)\end{cases}$$

设 $u(x, y) = f(\varphi(x, y))$ 其中 f 是任意函数，根据初始条件得

$$g(x) = f(\varphi(x, 0))$$

$$f(x) = g(\varphi^{-1}(x, 0))$$

$$u(x, y) = g(\varphi^{-1}(\varphi(x, y), 0))$$

其中 $\varphi^{-1}(x, 0)$ 是 $\varphi(x, 0)$ 的反函数. 特别沿着特征曲线 $\varphi(x, y) = c$，则 $u(x, y) = g(\varphi^{-1}(c, 0))$，即 u 的值不变，称这一性质为解沿着特征线传播.

例 1 右行单波方程及其初值问题.

设
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x}, t > 0, x \in R^1 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

其中 a 为正常数，方程的特征方程为 $\mathrm{d}x - a\mathrm{d}t = 0$，$x - at = c$ 为特征线族，设 $\xi = x - at$，$\eta = x$，则

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

故 $u = f(x - at)$ 为方程的通解，由初始条件得

$$\varphi(x) = f(x)$$

故 $u(x, t) = \varphi(x - at)$ 为初值问题的解.

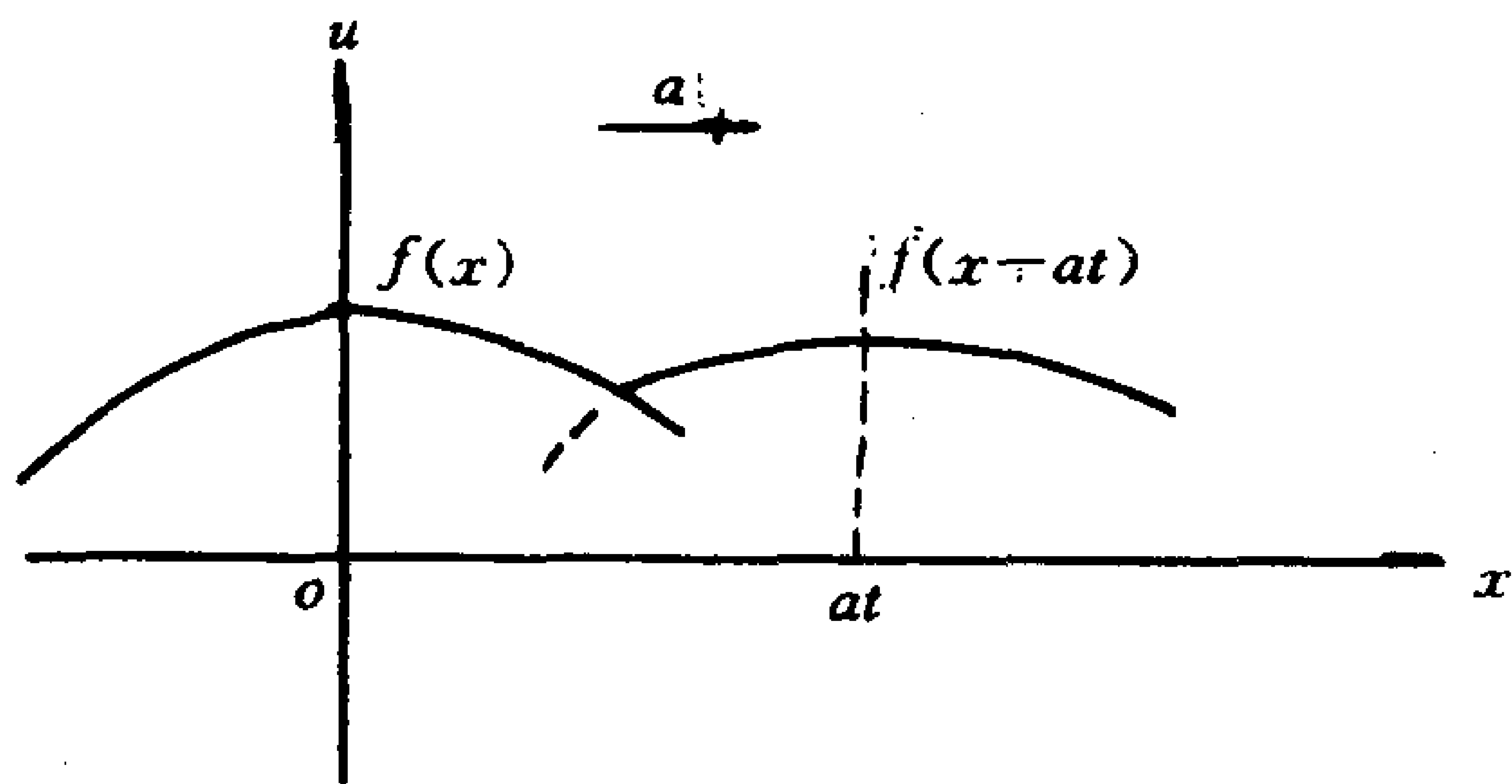


图 2.1

在方程的通解 $u = f(x - at)$ 中，把“时间”变量 t 作为参数，当 $t = 0$ 时 $u = f(x)$，而 $u = f(x - at)$ 作为 (u, x) 上的平面曲

线是 $u = f(x)$ 向右平移了 at，所以称 $f(x-at)$ 是右行波，a 是它的传播速度，如图 2.1 所示.

由初值问题的解

$$u(x, t) = \varphi(x - at)$$

可以看出，在 (x, t) 平面内解沿着特征线 $x - at = c$ 传播，在此特征曲线上 $u(x, t) = \varphi(c)$．若初始函数 $\varphi(x)$ 只给在 $[c_1, c_2]$ 上，则可以唯一地确定在特征条形域 $c_1 \leqslant x - at \leqslant c_2$ 内的解 $u(x, t)$，如图 2.2.

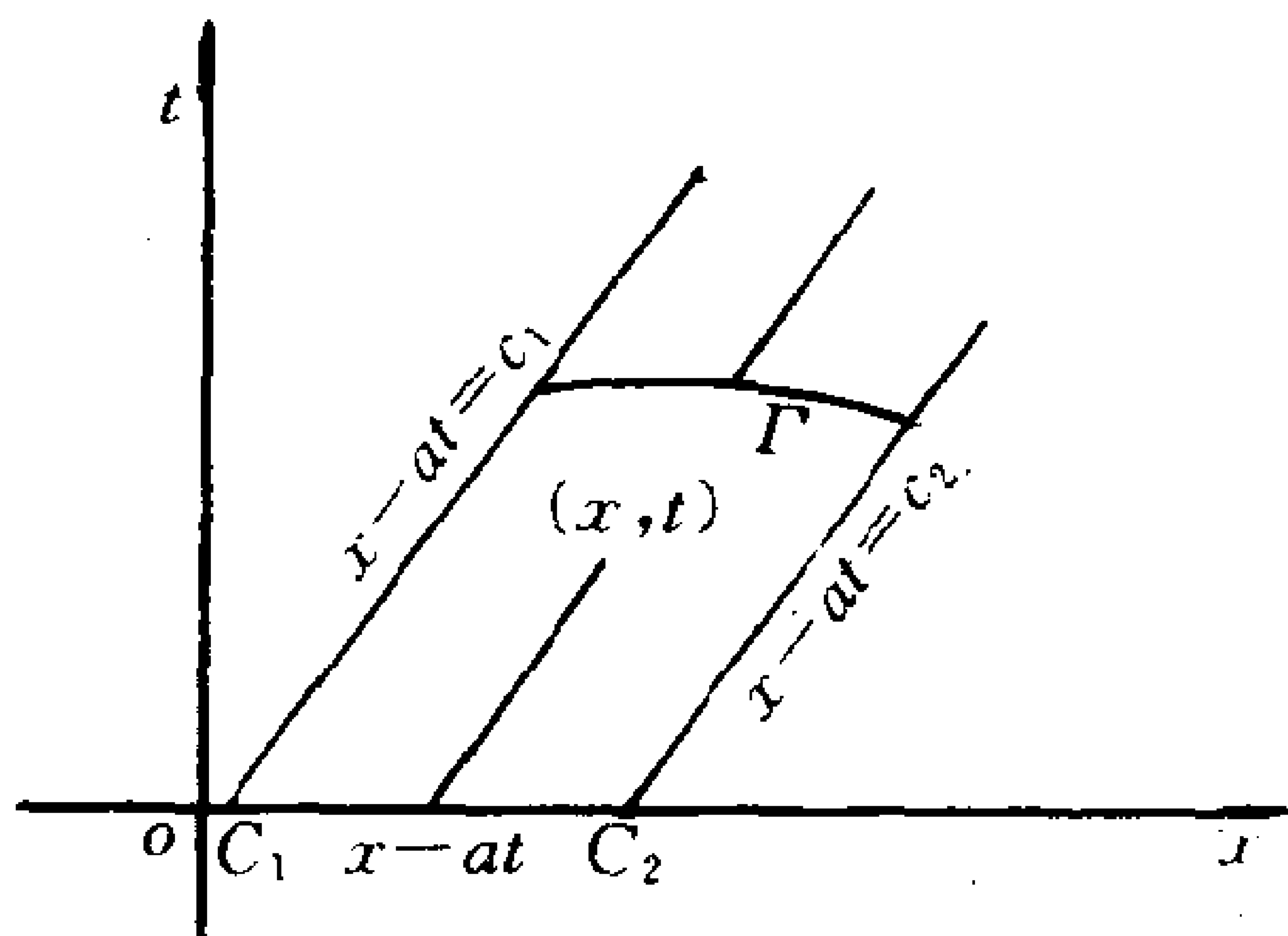


图 2.2

更一般的，如果初值数据给在 (x, t) 平面内的任意一非特征曲线段 Γ 上，则也可以唯一地在一由 Γ 和过 Γ 两端点的特征线围成的区域内确定初值问题的解，如图 2.2.

类似地，左行单波方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的特征线是 $x + at = c$，它的通解是左行波 $g(x + at)$，其中 g 是任意函数.

2.1.2 一维波动方程的行波法(通解法)

设 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，它的特征方程是

$$(\mathrm{d}x)^2 - a^2(\mathrm{d}t)^2 = 0 \quad 即 \quad (\mathrm{d}x - a\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x + a\mathrm{d}t) = 0$$

$x - at = c_1$ 和 $x + at = c_2$ 是两特征线族，分别称为右行特征线和左行特征线. 令 $\xi = x - at$，$\eta = x + at$，则得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$，所以方程的通解为 $u = f(\xi) + g(\eta)$，即 $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$，其中 f 和 g 是任意函数，所以一维波动方程的通解是右行波和左行波的迭加，其中 a 是行波的传播速度，所以，由一维波动方程的通解来求定解问题的方法又称为行波法，对于许多基

本的定解问题行波法是行之有效的，下面以例题的形式讨论这些定解问题.

例 1　初值问题(Cauchy 问题)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ x \in R^1 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right| = \psi(x) \end{cases}$$

由行波法可求得它的解是

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

这是著名的 D′ Alembert 公式，这在第一章中已经得出.

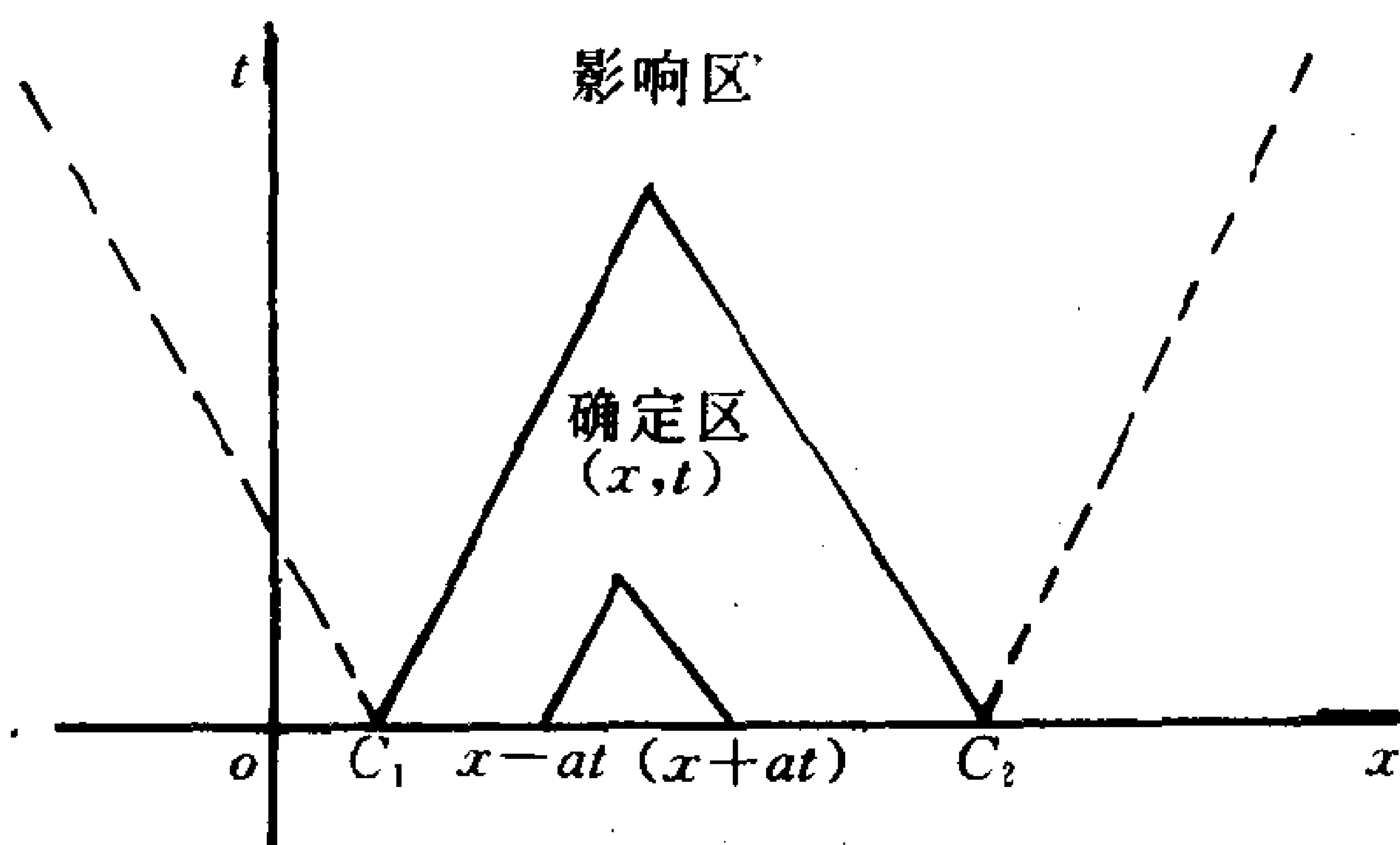


图　2.3

根据 D′ Alembert 公式可知. 在 (x,t) 平面内点 (x,t) 的状态只依赖于在 $[x-at,\ x+at]$ 上的初始数据，称此区间为点 (x,t) 的依赖区间，如图(2.3)，它由过点 (x,t) 的两条特征线所确定. 如果在 x 轴的区间 $[c_1,c_2]$ 上给定初始数据，则可唯一地确定在由 x 轴上的直线段 $[c_1,c_2]$ 和过端点 $(c_1,0)$ 的右行特征线及过 $(c_2,0)$ 点的左行特征线所围成的特征三角形区域上的 $u(x,t)$，称此特征三角形域为 $[c_1,c_2]$ 上初始数据的确定性区域，而 $[c_1,c_2]$ 上的初始数据所影响到的区域则是由 x 轴上的线段 $[c_1,$

c_2] 及过 [c_1, 0] 的左行特征线和过 (c_2, 0) 点的右行特征线所围成的无界的特征梯形区域.

如果 $\psi(x)=0$，则 $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$，则点 (x,t) 处的状态只由初始数据 φ 在 $[x-at,x+at]$ 的两个端点的值唯一确定，它表示初始数据 $\varphi(x)$ 以 $\dfrac{1}{2}\varphi(x)$ 的波形以速度 a 分别向右传播和向左传播，这是一种无累积效应(即无后效)的传播.

如果 $\varphi(x)=0$，则 $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$，则点 (x,t) 的状态依赖于初始数据 ψ 在整个区间 $[x-at,x+at]$ 上的值，这是一种有累积的效应(即有后效)的传播.

例 2 特征边值问题(Goursat 问题)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
u|_{x-at=0}=\varphi(x)\\
u|_{x+at=0}=\psi(x)
\end{cases}
$$

$\varphi(0)=\psi(0)$. 由行波法可确定出问题的解

$$
u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-at}{2}\right)-\varphi(0)
$$

如图 2.4，此公式表示在任意特征四边形 $OPMQ$ 中，两对角点上值的和相等. 如果只在两特征线上的一段 OA 和 OB 上给出 u 的值，则可在特征四边形 $OAEB$ 上确定 $u(x,t)$.

例 3 第三问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ x-at<0,\ x>0\\
u|_{x-at=0}=\varphi(x)\\
u|_{x=0}=h(t)
\end{cases}
$$

如图 2.5 所示，边值数据给在一特征线 $x-at=0$ 和另一非特征线 $x=0$ 上，也可以由通解法确定出问题的解，但也可以直接由

特征边值问题的结果而得出问题的解

$$u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)-\varphi\left(\frac{x-at}{2}\right)+h\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

类似地可以讨论边界数据的确定性区域是特征梯形域.

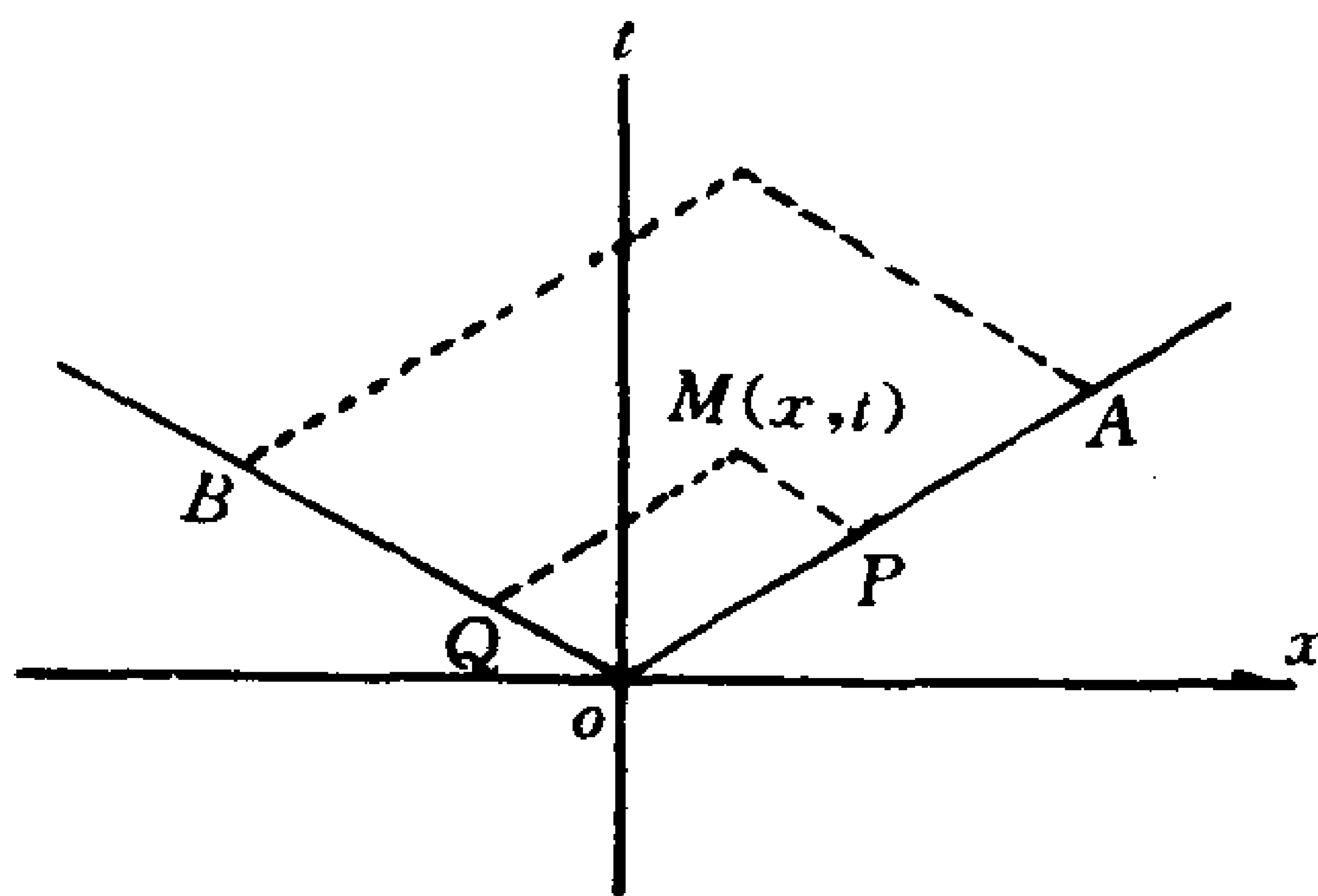


图 2.4

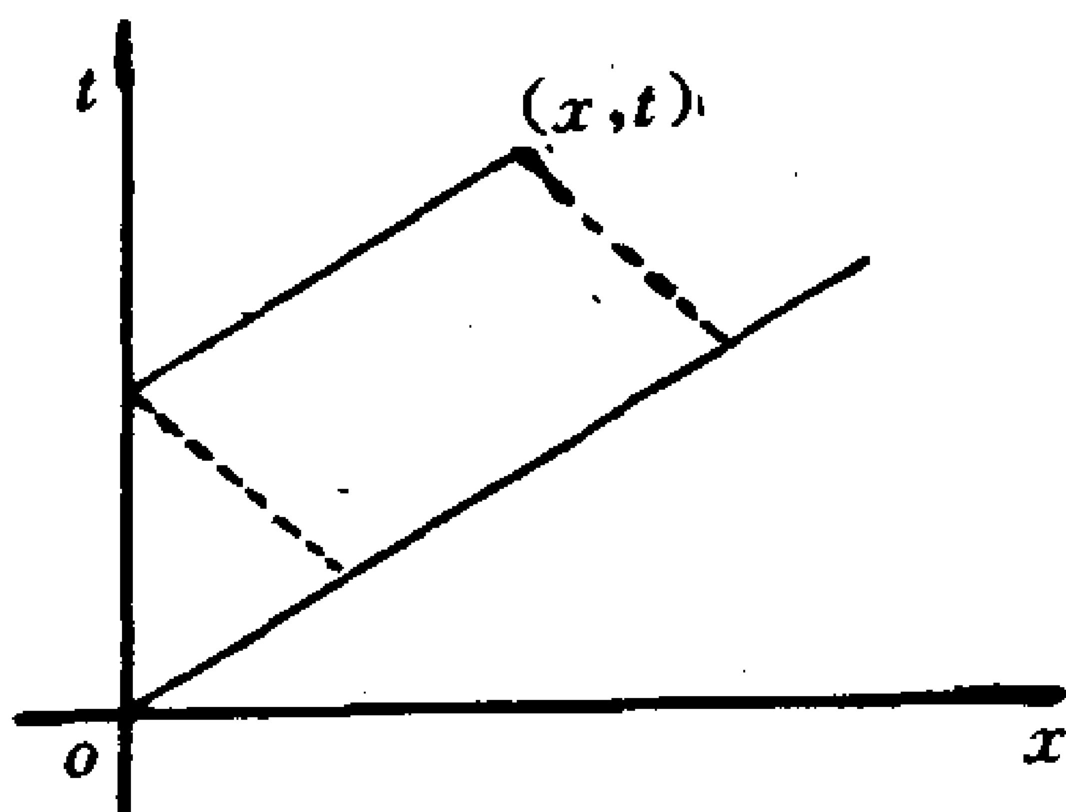


图 2.5

例 4　第三问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ x>0,\ x-at<0\\ u\big|_{x-at=0}=\varphi(x)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=g(t),\end{cases}$$

此问题和例 3 不同之处在于在非特征线 $x=0$ 上给的是第二类边值条件，由通解法可得

$$u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)-\varphi\left(\frac{at-x}{2}\right)-\varphi(0)-a\int_0^{t-\frac{x}{a}}g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

这时边值数据 $g(t)$ 的效应是累积的.

类似地也可以在非特征线 $x=0$ 上提第三类边界条件 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\beta u\right)\bigg|_{x=0}=g(t)$，根据通解法也可得出解的表达式，确定性区域也是特征梯形域.

例 5　混合问题，延拓法

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t > 0, \ x > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$\varphi(0) = 0$.

此问题可以分为先解一初值问题，再解一第三问题，即根据 D′ Alembert 公式在区域 $\{x - at \geqslant 0, x \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ 中

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

由此得出在特征线 $x - at = 0$ 上 u 的值

$$u\big|_{x-at=0} = \frac{1}{2}[\varphi(0) + \varphi(2x)] + \frac{1}{2a}\int_0^{2x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

然后在区域 $\{x - at \leqslant 0, x \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ 上解第三问题. 从而完全在区域 $\{x \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ 中确定出问题的解.

但本例将介绍用延拓法来求解，即把定义在 $x \geqslant 0$ 的初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 适当地延拓到 x 轴上得 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$. 以 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 为初值，根据 D′ Aembert 公式得解，使此解在 $x = 0$ 上满足原边界条件 $u|_{x=0} = 0$，从而得出问题的解，在本例中只要将 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 进行奇延拓，则可得出原问题的解

$$u = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi, \ x - at \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi, \ x - at < 0 \end{cases}$$

类似的，如果将 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 进行偶延拓，则可得出问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t > 0, \ x > 0$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$

的解.

例 6 散射问题.

讨论一无穷长的弹性杆(x 轴)的纵向振动，$u(x, t)$ 为纵向位移，t 为时间，设弹性杆由两段均匀介质组成，$x<0$ 一段介质的密度和杨氏模量分别为 ρ_1 和 E_1，$x>0$ 一段为 ρ_2 和 E_2，设右行入射波 $f\left(t-\frac{x}{a}\right)$ 从区域 $x<0$ 出发，当 $t=0$ 时到达分界点 $x=0$，在以后的时刻 $t\geqslant 0$ 开始反射和透射，这时在分界点 $x=0$ 偏微分方程失去意义，而在区域 $x>0$ 和 $x<0$ 内 $u(x, t)$ 分别满足两个不同的波动方程，而需通过 $x=0$ 处的连接条件将两段杆的振动联系起来，这样的模型在数学上归结到下列波动方程的散射问题.

设

$$u(x, t)=\begin{cases}u_1(x, t), & x<0, -\infty<t<+\infty \\ u_2(x, t), & x>0, -\infty<t<+\infty\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a_1^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & x<0, t\in(-\infty, \infty) \\ u_1(x, t)|_{t\leqslant 0}=f\left(t-\dfrac{x}{a_1}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a_2^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & x>0, t\in(-\infty, \infty) \\ u_2(x, t)|_{t\leqslant 0}=0\end{cases}$$

及连接条件

$$u_1(x, t)|_{x=0^-}=u_2(x, t)|_{x=0^+} \quad (\text{位移连续})$$

$$E_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0^-}=E_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0^+} \quad (\text{应力连续})$$

其中 $a_i^2=\dfrac{E_i}{\rho_i}$.

拟用行波法并根据问题的物理意义来求解此散射问题.

设 $$u_1(x,t)=f(t-\frac{x}{a_1})+g(t+\frac{x}{a_1})$$

$$u_2(x,t)=h(t-\frac{x}{a_2})$$

其中 $f(t-\frac{x}{a_1})$ 和 $g(t+\frac{x}{a_1})$ 分别表示在区域 $x<0$ 内的入射波和反射波，$h(t-\frac{x}{a_2})$ 表示在区域 $x>0$ 内的透射波，而在此区域内无反射波，所以问题在于确定反射波 $g(t+\frac{x}{a_1})$ 和透射波 $h(t-\frac{x}{a_2})$.

由条件 $$u_1(x,t)|_{t\leqslant 0}=f(t-\frac{x}{a_1})$$

$$u_2(x,t)|_{t\leqslant 0}=0$$

可得：当 $\xi<0$ 时 $g(\xi)=0$，当 $\xi>0$ 时 $h(\xi)=0$，再由联结条件得

$$\begin{cases} f(t)+g(t)=h(t) \\ -\dfrac{E_1}{a_1}f'(t)+\dfrac{E_1}{a_1}g'(t)=-\dfrac{E_2}{a_2}h'(t),\ t\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t)+g(t)=h(t) \\ -\dfrac{E_1}{a_1}f(t)+\dfrac{E_2}{a_2}g(t)=-\dfrac{E_2}{a_2}h(t),\ t\geqslant 0 \end{cases}$$

从而最终得出

$$g(t+\frac{x}{a_1})=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{|x|}{a_1} \\ \dfrac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}f(t+\dfrac{x}{a_1}), & t\geqslant \dfrac{|x|}{a_1} \end{cases}$$

$$h\left(t-\frac{x}{a_2}\right)=\begin{cases}0, & 0<t\leqslant \dfrac{x}{a_2}\\ \dfrac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2}f\left(t-\dfrac{x}{a_2}\right), & t\geqslant \dfrac{x}{a_2}\end{cases}$$

其中 $\eta_i=\dfrac{E_i}{a_i}=\sqrt{\rho_i E_i}=a_i\rho_i$ 表示阻抗. 从上述表达式可以看出，$\dfrac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$ 表示反射系数，$\dfrac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2}$ 表示透射系数.

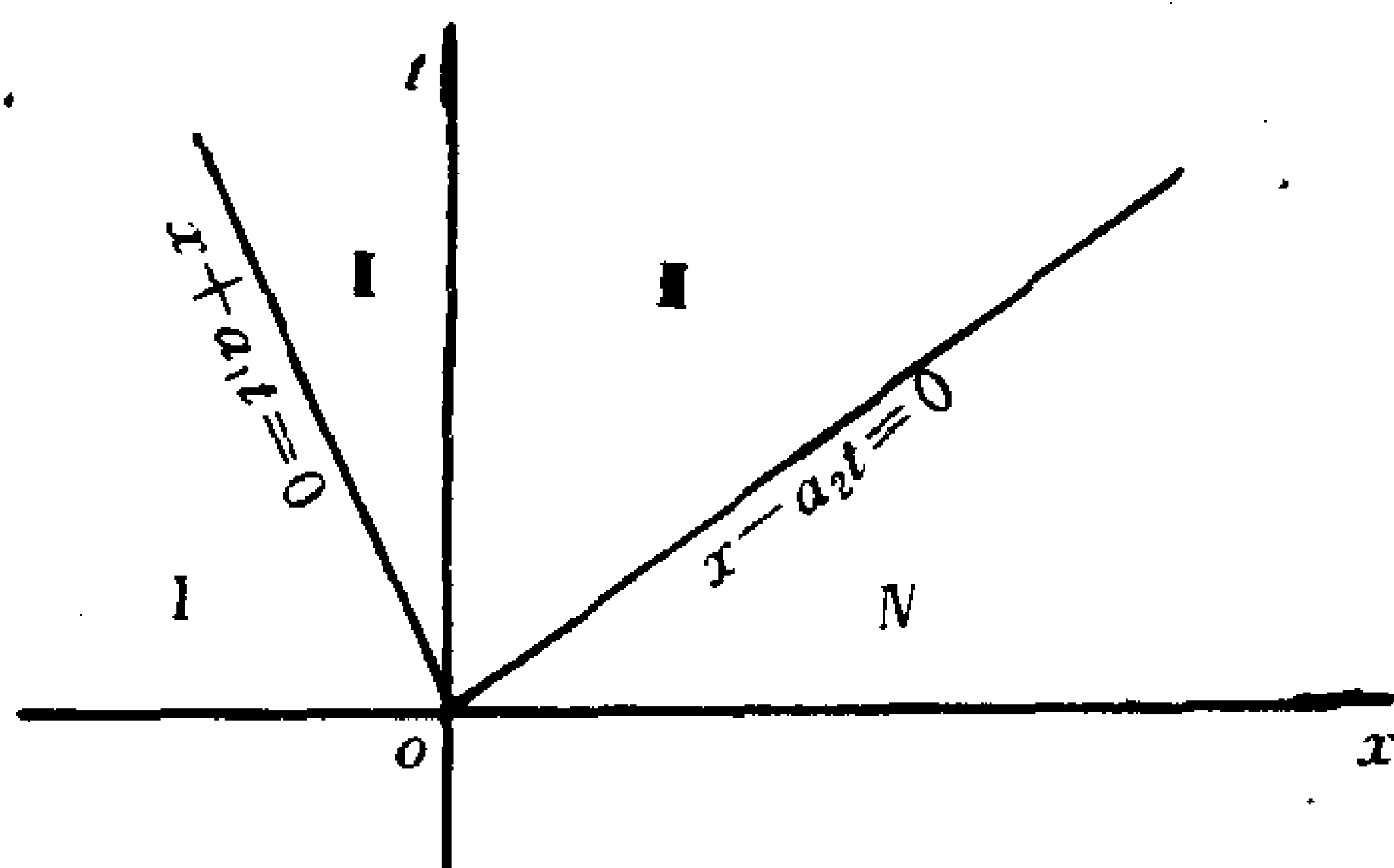


图 2.6

如图 2.6，设两特征线 $t+\dfrac{x}{a_1}=0$ 和 $t-\dfrac{x}{a_2}=0$ 和 t 轴把 (x, t) 平面分成四个区域，在区域 Ⅰ 内只有入射波 $f\left(t-\dfrac{x}{a_1}\right)$ 还无反射波，在区域 Ⅱ 内有入射波和反射波，在区域 Ⅲ 内有透射波. 在区域 Ⅳ 内还无透射波到达.

作为上述问题的推广，如果在 $x>0$ 内又再分成几段，各段的分界点提相类似的连接条件，则得到更一般的散射问题.

例 7 具连接条件的初值问题.

在例 6 的杆的纵振动散射问题中，杆的振动由入射波来引发的. 如果是由 $x<0$ 段的初始条件来引发，则可归结为具有连结条件的初值问题，即

设 $$u(x, t)=\begin{cases}u_1(x, t), & t>0,\ x<0\\ u_2(x, t), & t>0,\ x>0\end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\ t > 0,\ x < 0 \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},\ t > 0,\ x > 0 \\ u_2\big|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

及连接条件

$$\begin{cases} u_1\big|_{x=0^-} = u_2(x,\ t)\big|_{x=0^+} \\ E_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0^-} = E_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0^+} \end{cases}$$

为简单计设 $\psi(x) = 0$，$\varphi(0) = 0$，解此问题可采用通解法，也可采用延拓法，最后可得

$$u_1 = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x - a_1 t) + \varphi(x + a_1 t)}{2},\ x + a_1 t < 0 \\ \dfrac{\varphi(x - at)}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\varphi(-x - a_1 t),\ x + a_1 t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0, & x - a_2 t > 0 \\ \dfrac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\varphi\left[a_1\left(\dfrac{x}{a_2} - t\right)\right], & x - a_2 t \leqslant 0 \end{cases}$$

在这种情况下，反射波和透射波分别为

$$u_{re} = \frac{1}{2}\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}\varphi(-x - a_1 t),\ x + a_1 t \geqslant 0$$

$$u_{tr} = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\varphi\left[a_1\left(\frac{x}{a_2} - t\right)\right],\ x - a_2 t < 0$$

例 8 有界区间的混合问题，特征线方法

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t)$$

要用行波法和延拓法解混合问题较为困难，但如图 2.7，可以把 (x, t) 平面上的条形域，通过引特征线分成一些小区域 1，2，3，4，5，6，…则在区域 1 中解初值问题，继在区域 2，3 中解第三问题，继在 4 中解特征边值问题，继在 5，6 中再解第三问题，以此类推可以唯一地确定在条域上的解，称这种解法为特征线方法，它对于实际的计算是可行的，但很难找出解的具体表达式，为此在下一章还将用分离变量法来解决此类混合问题.

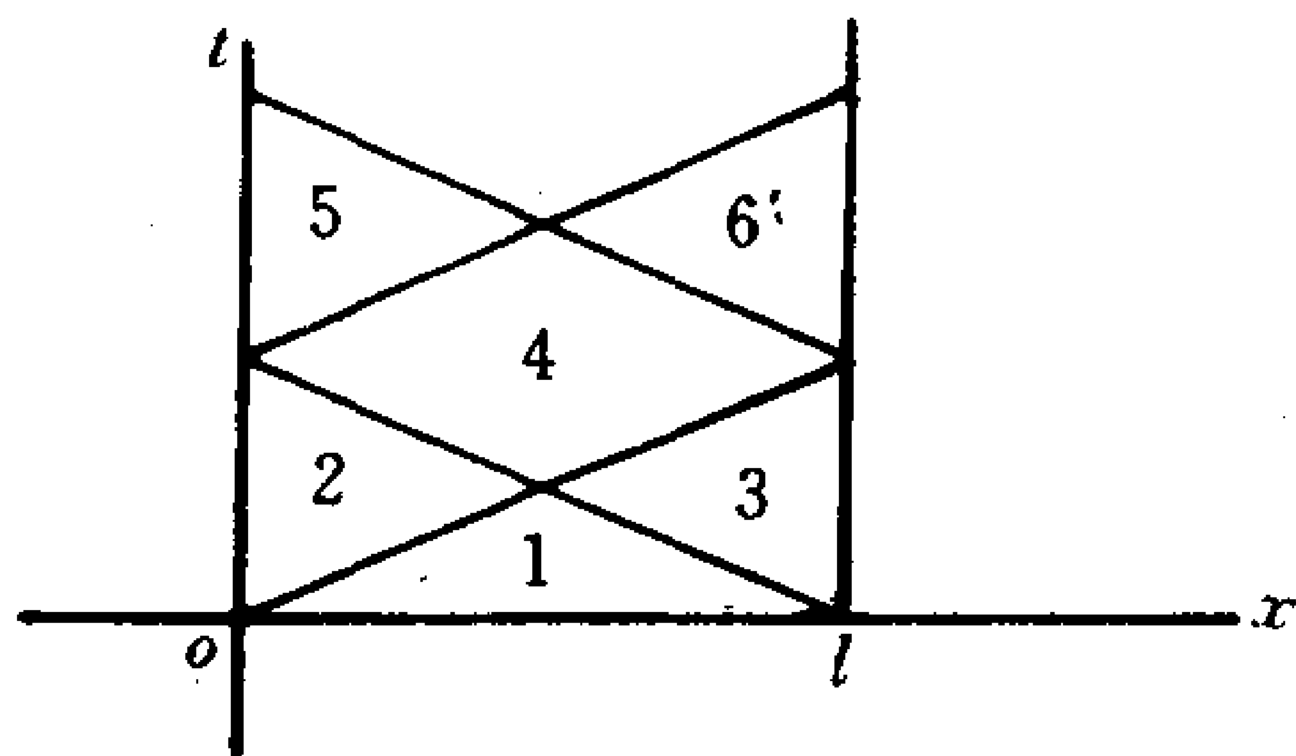


图 2.7

以上讨论了八个一维波动方程的定解问题，有些时候原要讨论的虽不是一维波动方程的问题，但可经过自变量代换和未知函数的代换把问题归结到一维波动方程的问题，这中有些代换有一定规律可循，有的则需要一定的技巧.

例 9　三维波动方程的球面波解.

设 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)$，如果求方程的球面对称解 $u(r, t)$，其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$，则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

作未知函数代换

$$v(r, t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int \frac{2}{r}\mathrm{d}r} u(r, t) = ru(r, t)$$

则

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(r, t)}{\partial r^2}$$

所以

$$u(r, t) = \frac{f(r - at) + g(r + at)}{r}$$

其中 f 和 g 是任意函数，$f(r - at)$ 表示沿着 r 的正向以速度 a 传播的波，称为发射波，$g(r + at)$ 表示沿着 r 负向以速度 a 传播的波，称为会聚波，因子 $\frac{1}{r}$ 表示沿着 r 的正向波的衰减.

根据三维波动方程球面对称的通解或直接根据一维波动方程解的有关公式，可确定某些球对称的解. 例如

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) & t > 0,\ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$，则可得解

$$u(r, t) = \begin{cases} \dfrac{(r + at)\varphi(r + at) + (r - at)\varphi(r - at)}{2r} \\ \qquad + \dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{r-at}^{r+at} \xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,\ r - at > 0, \\ \dfrac{(r + at)\varphi(r + at) - (at - r)\varphi(at - r)}{2r} \\ \qquad + \dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{at-r}^{r+at} \xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,\ r - at \leqslant 0 \end{cases}$$

例 10 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + B(x)u$

此方程在讨论波在不均匀介质中的传播问题中会经常见到，若作代换

$$u(x, t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int A(x)\mathrm{d}x} v(x, t)$$

则

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(B(x) - \frac{A'(x)}{2} - \frac{A^2(x)}{4}\right)v$$

如果 $B(x) - \dfrac{A'(x)}{2} - \dfrac{A^2(x)}{4} = 0$ 时，则变为波动方程.

2.1.3 n 个自变量一阶线性方程的通解法

设

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

是一阶线性偏微分方程，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$a_i(x)$ 不全为零. 若 $a_1(x) = \cdots = a_{n-1}(x) = 0$，则为最简单情况，这时方程的通解是

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

其中 f 是任意的 $(n-1)$ 个自变量的函数. 对于一般的情况，总可作适当的自变量的非奇异变换，使方程化为最简单的情况，其处理方法是两个自变量情况的推广，称

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)} \tag{4}$$

为方程(3)的特征方程组，可以把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任意一个作为自变量，其余的视为此自变量的函数，所以特征方程组是由 $(n-1)$ 个常微分方程组成的方程组. 如果引入参变数 t，则特征方程组可以写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = a_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

特征方程组的积分曲线称为方程(3)的特征曲线.

不难证明，若 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = C$ 是特征方程组的一个第一积分，则 $u = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 一定满足一阶偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

事实上，因为沿着特征曲线有

$$\varphi(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) = C$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} a_i(x(t)) = 0$$

又由于 C 可以取任意常数，所以在 R^n 中的一个区域中恒有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = 0$$

这就证明了 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 满足一阶偏微分方程(3).

若 $\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1, \cdots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_{n-1}$ 是特征微分方程组的 $(n-1)$ 个独立的第一积分，作自变量的非奇异变换

$$\begin{cases} \xi_1 = \varphi_1((x_1, x_2, \cdots, x_n)) \\ \xi_2 = \varphi_2((x_1, x_2, \cdots, x_n)) \\ \vdots \\ \xi_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \xi_n = \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

其中 $\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是任取的一个函数，只要使上述变换是非奇异的，则根据上述证明了的基本事实，方程(3)变为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial \xi_n} = 0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_n} = 0$$

所以

$$u = f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$$

即 $$u(x_1, \cdots, x_n) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x))$$

其中 f 是任意的 $(n-1)$ 个自变量的函数，它即是方程(3)的通解.

一般说来，只要给定初始数据的 R^n 中的曲面 S 中无方程(3)的特征线，则可由通解法求出方程(3)初值问题的解.

例 1
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2) \end{cases}$$

方程的特征方程是

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = -\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = -\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}$$

它有两个独立的第一积分 $x_1 \mathrm{e}^t = c_1$ 和 $x_2 \mathrm{e}^t = c_2$，所以方程的通解是

$$u(x_1, x_2, t) = f(x_1 \mathrm{e}^t, x_2 \mathrm{e}^t)$$

根据初始条件得

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

所以初值问题的解是

$$u(x_1, x_2, t) = \varphi(x_1 \mathrm{e}^t, x_2 \mathrm{e}^t)$$

对于更一般的一阶线性方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x) u$$

情况是类似的，也是先由特征方程组的 $n-1$ 个独立的第一积分作自变量的代换可得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_n} + a(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) u = 0$$

由此得通解

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{e}^{-\int a(\xi_1, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_n) \mathrm{d}\xi_n} \cdot f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) \\ &= A(\xi_1, \cdots, \xi_n) f(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) \end{aligned}$$

其中 f 是任意 $n-1$ 元的函数，回到原自变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 得

$$u=A(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x))\,f(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x))$$

2.1.4 其它某些高阶方程的通解

从上述各小节的讨论可知，一个方程要能较容易地求出通解，主要的方法是通过适当的变换使方程转化为只含有唯一的一导数项的齐次或非齐次方程，对于这种简单的方程通解容易求出，再进一步由通解法求解定解问题. 对于高阶方程也是这样，对于这种只含有唯一的一个高阶导数项的齐次方程就可用逐次降阶的方法得出通解，这样，对于通解的求法就有一种统一的认识，用来指导对具体问题的分析.

例 1
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f(x,y)\\ u|_{x=0}=\varphi(y),\ u|_{y=0}=\psi(x)\end{cases}$$

$x=0$，$y=0$ 是方程的两条特征线，这是特征边值问题.

显然，方程的通解为

$$u(x,y)=f(x)+g(y)+\int_0^x \mathrm{d}\xi\int_0^y f(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta$$

其中 f，g 为任意函数，由定解条件可唯一地确定得

$$f(x)+g(y)=\psi(x)+\varphi(y)-\varphi(0)$$

其中 $\varphi(0)=\psi(0)$，故得

$$u(x,y)=\psi(x)+\varphi(y)-\varphi(0)+\int_0^x \mathrm{d}\xi\int_0^y f(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta$$

例 2
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)\\ u|_{y=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\psi(x)\end{cases}$$

方程的通解为

$$u(x, y) = f(x) + y\, g(y) + \int_0^y \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} f(x, \eta)\mathrm{d}\eta$$

其中 f 和 g 是任意函数，由初始条件唯一地得

$$f(x) = \varphi(x),\ g(x) = \psi(x)$$

故得

$$u(x, y) = \varphi(x) + y\, \psi(x) + \int_0^y \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} f(x, \eta)\mathrm{d}\eta$$

例 3 $\quad \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$

可把方程写为

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_1(x) + g_1(y)$$

$f_1(x)$ 和 $g_1(y)$ 是任意函数. 两边积分可得

$$u(x, y) = f(x) + yg(x) + v(y) + x\omega(y)$$

其中 f, g, v, ω 是四个任意函数，这就是上述四阶方程的通解，对于某些定解问题也可以由通解确定出特解.

例 4 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

把方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + u\right) = 0$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u = f(y)$$

其中 f 是任意函数，故

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^y u) = \mathrm{e}^y f(y)$$

$$u(x, y) = h(y) + \mathrm{e}^{-y} g(x)$$

其中 h 和 g 是任意函数，这便是方程的通解. 由此通解可唯一地得出问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u|_{x=0} = \varphi(y) \\ u|_{y=0} = \psi(x) \end{cases}$$

的解，其中 $\varphi(0) = \psi(0)$.

2.2 球面平均法

球面平均法是求解常系数双曲型方程初值问题一个古典和巧妙的方法，本节首先用此方法推出三维波动方程初值问题的解，然后用降维法推出二维波动方法初值问题的解. 根据解的公式讨论解的传播性质和柱面波的弥漫现象，最后介绍用球面平均法可得出的 n 维波动方程初值问题解的统一公式，再用降维法得出推广了的 n 维波动方程初值问题的解.

2.2.1 **球面平均法，三维波动方程初值问题解的 Poisson 公式及后推势**

设 $x = (x_1, x_2, x_3)$，$B_r(x)$ 表示以 x 为中心，r 为半径的球，$\partial B_r(x)$ 表示此球的球面，$\psi(x) \in C^2(R^3)$，则 ψ 的在球面 $\partial B_r(x)$ 上的平均值函数

$$M_x^r[\psi] = v(x, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B_r(x)} \psi \mathrm{d}s$$

满足下列 Darboux 方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \Delta v + \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial v}{\partial r} = 0, r > 0, x \in R^3 \\ v|_{r=0} = \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

事实上，利用以 x 为中心的球面坐标 θ 和 φ, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，则

$$v(x, r)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(x_1+r\alpha_1, x_2+r\alpha_2, x_3+r\alpha_3)\mathrm{d}\sigma_r$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(x_1+r\alpha_1, x_2+r\alpha_2, x_3+r\alpha_3)\mathrm{d}\sigma_1$$

其中

$$\alpha_1=\sin\theta\cos\varphi,\ \alpha_2=\sin\theta\sin\varphi,\ \alpha_3=\cos\theta$$

$$\mathrm{d}\sigma_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_1=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

所以

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\alpha_i\right)\mathrm{d}\sigma_r$$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{B_r(x)}\Delta\psi\mathrm{d}V\quad(\text{Gauss 公式})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=-\frac{1}{2\pi r^3}\iiint_{B_r(x)}\Delta\psi\mathrm{d}V+\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\psi\mathrm{d}\sigma_r$$

$$\Delta v=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Delta\psi\mathrm{d}\sigma_r$$

所以得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\Delta v+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}=0,\ r>0,\ x\in R^3\\ \lim\limits_{r\to 0}v(x, r)=\psi(x_1, x_2, x_3)\\ \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\partial v}{\partial r}=0\end{cases}$$

所以，如果设 $u(x, r)=e^{\frac{1}{2}\int\frac{2}{r}}v(x, r)=rv(x, r)$，则 $u(x, r)$ 必然满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\Delta u=0$$

$$u|_{r=0}=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=\psi(x_1, x_2, x_3)$$

所以立即可知：当 $\psi(x)\in C^2(R^3)$ 时 $u(x, t)=tM_x^{at}[\psi]$ 给出下列波动方程初值问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u, \ t>0, \ x\in R^3\\ u|_{t=0}=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

所以如果 $\varphi(x)\in C^3(R^3)$，则 $tM_x^{at}[\varphi]$ 不但满足上列的波动方程，而且是三阶连续可微的，由于方程是常系数的，$w(x, t)=\dfrac{\partial}{\partial t}[tM_x^{at}[\varphi]]$ 也必然满足上列波动方程，且满足初始条件：

$$w(x, t)|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t}[tM_x^{at}[\varphi]]_{t=0}=\varphi(x)$$

$$\left.\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}[tM_x^{at}[\varphi]]_{t=0}$$

$$=a^2\Delta\,[tM_x^{at}[\varphi]]_{t=0}=0$$

即当 $\varphi(x)\in C^3(R^3)$ 时，$w(x, t)=\dfrac{\partial}{\partial t}[tM_x^{at}[\varphi]]$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\Delta w, \ t>0, \ x\in R^3\\ w|_{t=0}=\varphi(x)\\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

根据叠加原理和综上所述可得：当 $\psi(x)\in C^2(R^3)$，$\varphi(x)\in C^3(R^3)$ 时，三维波动方程初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u, \ t>0, \ x\in R^3$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

的解为

$$u(x,t) = tM_x^{at}[\psi] + \frac{\partial}{\partial t}[tM_x^{at}[\varphi]]$$

称此为 Poisson 公式. 解的唯一性可以直接应用 Holmgren 定理得出，也可以用其它的方法证明. 解的稳定性可直接由 Poisson 公式得出，也可用其它的方法证明. 所以三维波动方程初值问题是适定的. 当 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 不够光滑时，Poisson 公式也给出了问题的广义解.

根据齐次化原理可得出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(x,t),\ t > 0,\ x \in R^3 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解是

$$u = \int_0^t (t-\tau)\, M_x^{a(t-\tau)}[f(x,\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f\left(x_1 + r\alpha_1,\ x_2 + r\alpha_2,\ x_3 + r\alpha_3,\ t - \dfrac{r}{a}\right)}{r} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma_1$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{r\leqslant at} \frac{f\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ t - \dfrac{r}{a}\right)}{r}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3$$

其中 $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$，称此解为后推势，其物理意义是它具体表明了外加的源项 f 对物理场 u 的影响，即在空间点 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 处在时刻 $t - \dfrac{r}{a}$ 源的值恰是在时刻 t 影响到空间点 x 处的状态，后推了的时间 $\dfrac{r}{a}$ 恰是以速度 a 从点 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 行驶到点 x 点的时间，而源的影响的强度随着源点到

场点距离的增加而衰减.

2.2.2 降维法，二维波动方程初值问题解的 Poisson 公式

设 $u(x_1, x_2, t)$ 是

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right), \ t > 0, (x_1, x_2) \in R^2 \\
u|_{t=0} = 0 \\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x_1, x_2)
\end{cases}
$$

的解，如果把 $u(x_1, x_2, t)$ 视为 $t > 0$, $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ 中的四元函数时，显然它也必然是三维波动方程初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) \\
\qquad\qquad\qquad t > 0, (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \\
u|_{t=0} = 0 \\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x_1, x_2)
\end{cases}
$$

的解，根据解的唯一性，必然可以由三维波动方程初值问题解的公式推出二维波方程初值问题解的公式，称此为降维法，所以

$$
\begin{aligned}
u(x_1, x_2, t) &= tM^{at}_{(x_1, x_2, x_3)}[\psi] \\
&= \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S \psi(\xi_1, \xi_2)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

其中 S 是球面 $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 = a^2t^2$，把此球面上的面积分化为二重积分可得

$$
u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\iint_{D_x^{at}} \frac{\psi(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{(at)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_1 - x_2)^2}}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2
$$

其中 D_x^{at} 表示以 (x_1, x_2) 为中心，at 为半径的圆形区域.

根据和三维时的类似讨论可得：当 $\psi(x_1, x_2) \in C^2(R^2)$，$\varphi(x_1, x_2) \in C^3(R^2)$ 时，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u,\ t > 0,\ x \in R^2 \\
u\big|_{r=0} = \varphi(x) \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)
\end{cases}
$$

的解是

$$
u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_x^{at}} \frac{\psi(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2
$$

$$
+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_x^{at}} \frac{\varphi(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2
$$

其中 $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}$，也称此为 Poisson 公式.

根据齐次化原理，也可以得出非齐次二维波动方程初值问题解的积分表达式.

2.2.3 波动方程初值问题解的传播特性，柱面波弥漫现象

$$
\text{设}\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u,\ t > 0,\ x \in R^n \\
u\big|_{t=0} = 0 \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)
\end{cases}
$$

其中 $n = 2$ 或 $n = 3$，根据 Poisson 公式，$n = 2$ 时，则

$$
u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_x^{at}} \frac{\psi(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2
$$

其中 $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^1 + (x_2 - \xi_2)^2}$. $n = 3$ 时，则

$$
u(x,t) = tM_x^{at}[\psi]
$$

所以，$n = 2$ 时，点 (x,t) 的依赖初始数据的区域是以 x 为中心，at 为半径的圆域 D_x^{at}：$(x_1 - \xi_1)^1 + (x_2 - \xi_2)^2 \leqslant a^2t^2$，它是由二维波动方程过点 (x_1, x_2, t) 的特征锥面 $(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$

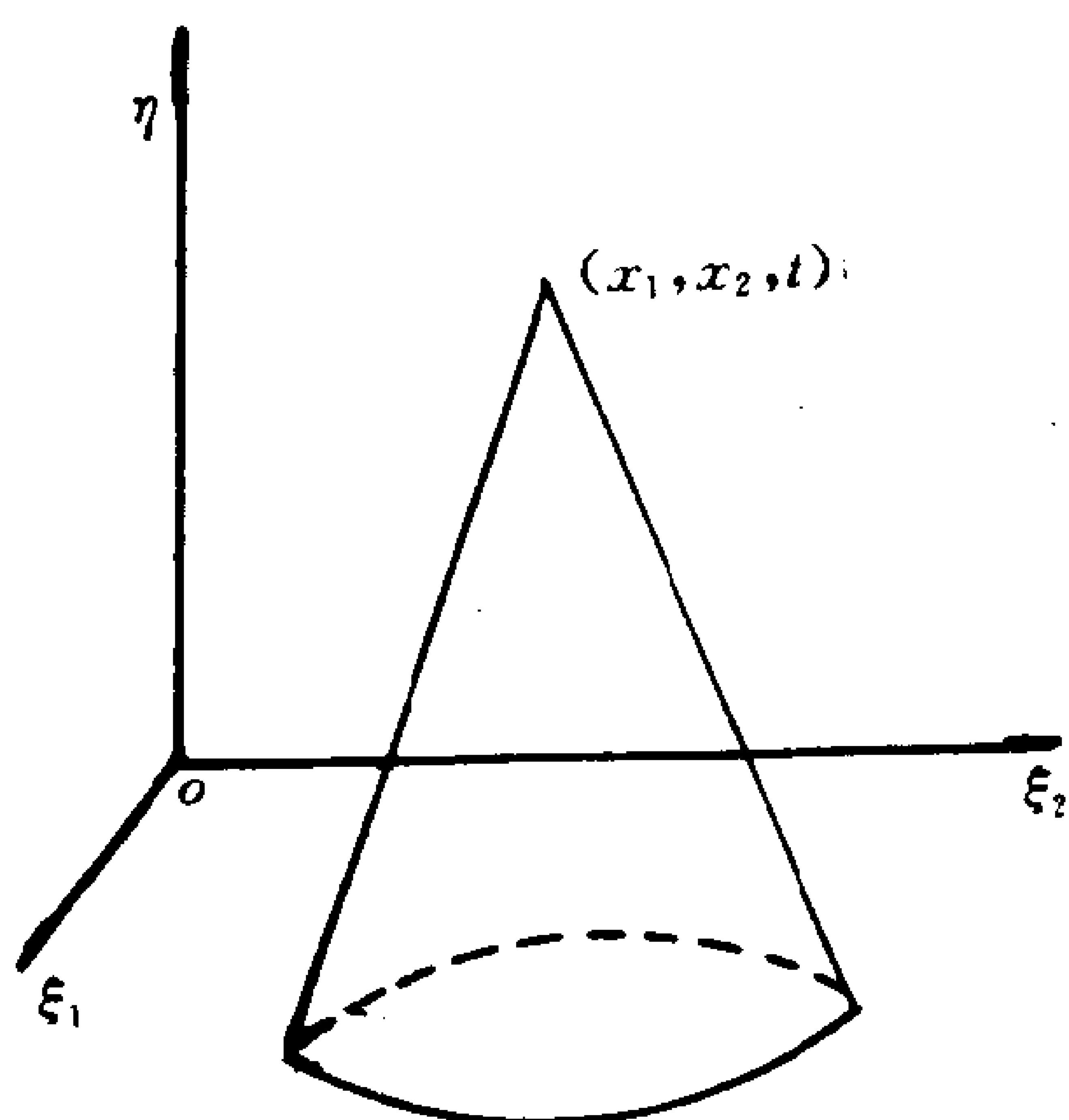


图 2.8

$= a^2(\eta - t)^2$ 和平面 $\eta = 0$ 相交得的圆和它的内部区域(图 2.8). $n = 3$ 时的情况有所不同，点 (x, t) 的依赖于初始数据的区域只是以 x 为中心，at 为半径的球面 S：$(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 = a^2t^2$，它是由三维波动方程过点 (x_1, x_2, x_3, t) 的特征锥面 $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 = a^2(\eta - t^2)$ 和平面 $\eta = 0$ 相交得的球面，其中 η 轴表示时间轴. 类似于 $n = 1$ 的情况，可以讨论初始数据所在空间区域的影响区域和确定性区域，它们均可以由特征锥面来确定. 例如，$n = 2$ 时平面上一点 $(x_1, x_2, 0)$ 的影响区域就是特征锥体 $\{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leqslant a^2\eta^2, \eta > 0\}$，平面上的圆域 D_x^{at}：$(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leqslant a^2t^2$ 的确定性区域就是特征锥体 $\{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leqslant a^2(\eta - t)^2\}$.

设初始数 $\psi(x)$ 的支集为 R^n 中的一有界的闭集 T_0，设 x 为 T_0 外的一个点，d_1 和 d_2 分别为点 x 到 T_0 各点距离的最小值和最大值(图 2.9)，则根据 Poisson 公式可知，$n = 3$ 时，在时刻 $t_1 = \frac{d_1}{a}$ 初始数据 ψ 开始影响到点 x 的状态，当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 = \frac{d_2}{a}$ 时，初始数据影着点 x 的状态 $u(x, t)$，但是当在时刻 $t_2 = \frac{d_2}{a}$ 以后，初始数据对 x 点的影响消失而恢复到静止的状态，即当 $t > \frac{d_2}{a}$ 时，$u(x, t) = 0$. 但是 $n = 2$ 的情况则有本质的不同，当时刻 $t_1 = \frac{d_1}{a}$ 初始数据开始影响到 x 点的状态，但在此时刻以后初始数据一直

影响着 x 点的状态而永不消失，这种现象称为有后效性，或称为波的弥漫．或者换另一种说法，$n=3$ 时，在空间一个点 x 处的初始数据，到时刻 t 只影响到空间中以 x 为中心 at 为半径的球面 S 上各点的状态，这种情况称为球面波，a 是波的传播播种速度．但是当 $n=2$ 时，空间一点 $x=(x_1, x_2)$ 处的初始数据，到时刻 t 影响到的空间 R^2 中的以 x 为中心，at 为半径的圆 D_x^{at} 上各点的状态，这种情况称为柱面波，它的传播速度也是 a．球面波是无后效的，柱面波是有后效的．

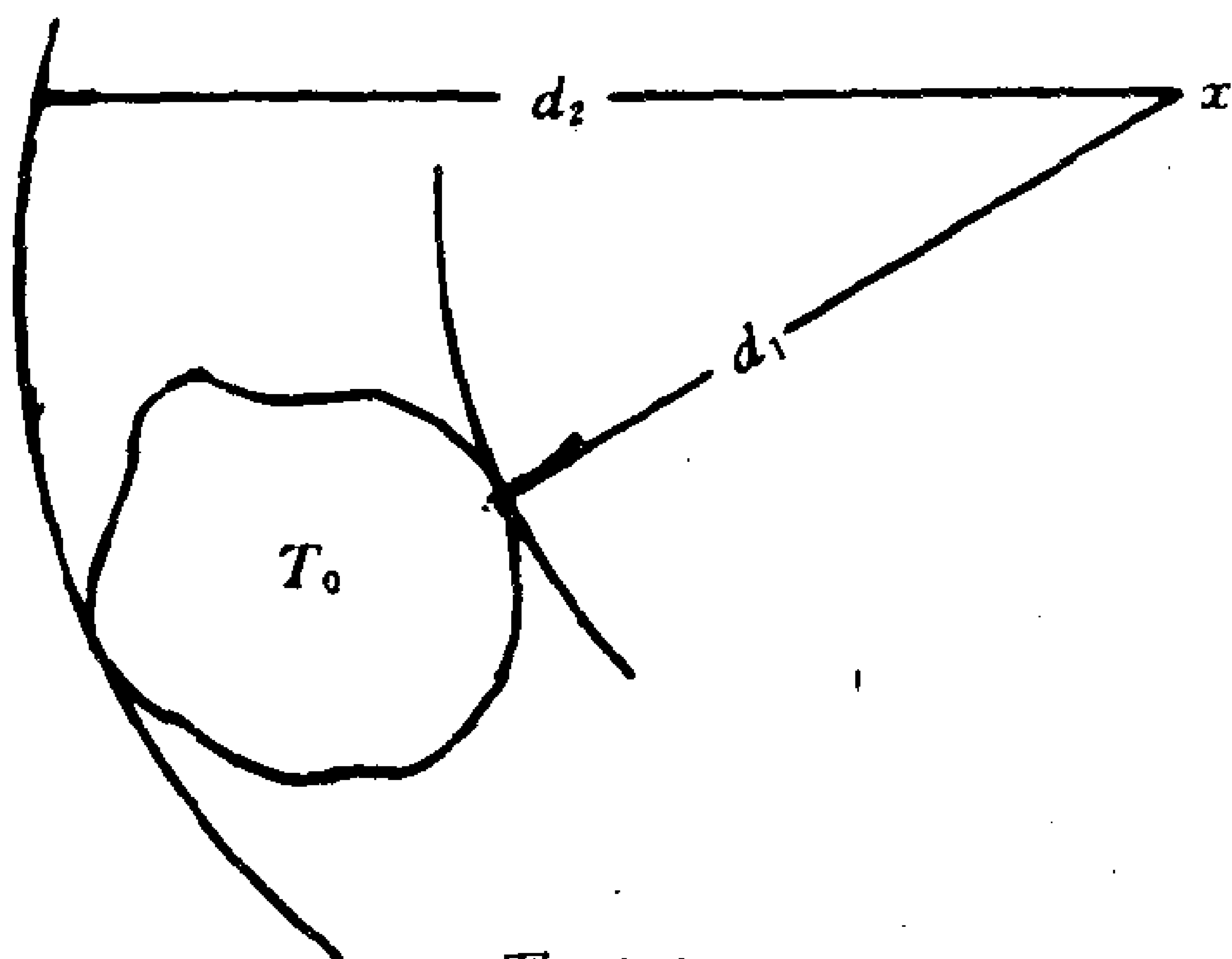


图 2.9

*2.2.4 n 维波动方程初值问题的解

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$B_r(x)$ 表示 R^n 中以 x 为中心，r 为半径的球，$\partial B_r(x)$ 表示球面，$\psi(x)\in C^2(R^n)$ 在球面 $\partial B_r(x)$ 上的球面平均值函数为

$$M_x^r[\psi]=v(x, r)=\frac{1}{\sigma_n(r)}\int\cdots\int_{\partial B_r(x)}\psi \mathrm{d}s$$

其中 $\sigma_n(r)=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}r^{n-1}$ 为球面 $\partial B_r(x)$ 的面积，如果用以 x 为中心的球面坐标 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-2}, \varphi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，则

$$M_x^r[\psi] = \frac{1}{\sigma_n(r)}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} \psi(x_1 + r\alpha_1, x_2 + r\alpha_2, \cdots, x_n + r\alpha_n) d\sigma_n(r)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi \\ \alpha_2 = \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\varphi \\ \alpha_3 = \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} = \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \alpha_n = \cos\theta_1 \\ d\sigma_n(r) = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2 \\ \qquad\qquad \cdots\sin\theta_{n-2}d\theta_1\cdots d\theta_{n-2}d\varphi \end{cases}$$

类似于 $n = 3$ 的情况可证明 $v(x, r)$ 满足下列 Darboux 方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} - \Delta v = 0, \ r > 0, \ x \in R^n \\ v|_{r=0} = \psi(x) \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

当 $n \neq 3$ 时，上述 Darboux 方程初值问题和 n 维波动方程初值问题的关系较为复杂些，但是仍然可建立它们之间的联系而得出下列的一般结果[8]：

若 $\psi(x) \in C^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}(R^n)$，则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u, \ t > 0, \ x \in R^n \\ u|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

的解是

84

$$u(x, t)=\frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{a^{n-1}}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}$$

$$\cdot\int_0^{at}(a^2t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}\, rM_x^r[\psi]\mathrm{d}r,\ n\geqslant 2$$

$n=2$ 或 $n=3$ 时就是已推出的 Poisson 公式，$n=4$ 时可得

$$u(x, t)=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\frac{t}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\, rM_x^r[\psi]\mathrm{d}r$$

2.2.5 推广的波动方程初值问题的解

讨论推广的波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+cu,\ t>0,\ x\in R^n\\ u|_{t=0}=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

若设 $\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, t)=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{c}}{a}x_{n+1}}\ u(x_1, \cdots, x_n, t)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\Delta w,\ t>0,\ x\in R^{n+1}\\ w|_{t=0}=0\\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=e^{\frac{\sqrt{c}}{a}x_{n+1}}\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\end{cases}$$

所以，根据唯一性定理可用 $(n+1)$ 维波动方程初值问题解的公式来推出 n 维推广了的波动方程初值问题解的公式.

例1 设

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+cu,\ t>0,\ x_1\in R^1\\ u|_{t=0}=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x_1)\end{cases}$$

设 $w(x_1, x_2, t) = e^{\frac{\sqrt{c}}{a}x_2} u(x_1, t)$，则

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),\ t > 0,\ (x_1, x_2) \in R^2$$

$$w|_{t=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{c}}{a}x_2}\psi(x_1)$$

根据 Poisson 公式得

$$w(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_x^{at}} \frac{\psi(\xi_1)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{c}}{a}\xi_2}}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2$$

其中 D_x^{at} 是以 (x_1, x_2) 为中心的圆域

$$r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}$$

所以

$$u(x_1, t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_x^{at}} \frac{\psi(\xi_1)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{c}}{a}(\xi_2 - x_2)}}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_{-at}^{at}\psi(\eta_1 + x_1)\mathrm{d}\eta_1\int_{-\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{c}}{a}\eta_2}}{\sqrt{a^2t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}\mathrm{d}\eta_2$$

里层的积分利用三角代换 $\eta_2 = \sqrt{a^2t^2 - \eta_1^2}\sin\varphi$，则

$$u(x_1, t) = \frac{1}{2\pi a}\int_{-at}^{at}\psi(\eta_1 + x_1)\mathrm{d}\eta_1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{c}}{a}\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_{-at}^{at}\psi(\eta_1 + x_1)I_0\left(\frac{\sqrt{c}}{a}\sqrt{a^2t^2 - \eta_1^2}\right)\mathrm{d}\eta_1$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int_{x_1-at}^{x_1+at}\psi(\xi_1)I_0\left(\frac{\sqrt{c}}{a}\sqrt{a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2}\right)\mathrm{d}\xi_1$$

其中 $I_0(u) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{u\sin\varphi} \, d\varphi$ 是零阶虚变量的 Bessell 函数，如果 $c <$ 0 时，$u(x_1, t)$ 又可写为

$$u(x_1, t) \frac{1}{2\pi a} \int_{x_1-at}^{x_1+at} \psi(\xi_1) J_0\left(\frac{\sqrt{|c|}}{a} \sqrt{a^2t^2 - (\xi_1 - x_1)^2}\right) d\xi_1$$

其中 $J_0(u) = I_0(iu) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{iu\sin\varphi} \, d\varphi$ 是零阶 Bessell 函数.

前面用球面平均法解决了 n 维波动方程初值问题，对于一般的常系数双曲型方程的初值问题，球面平均法也是行之有效的，例如，可以用球面平均法推出超双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

初值问题解的积分表达式[6].

习 题 二

内容包括：行波法和通解法，一阶线性偏微分方程的特征方程组及通解法，波动方程初值问题解的 D′ Alembert 和 Poisson 公式，波的传播特性，依赖区域和确定区域，降维法和延拓法，推广的波动方程初值问题解的公式.

1. 用行波法求解下列定解问题

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ x + at > 0,\ x - at < 0 \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x) \\ u|_{x+at=0} = \psi(x) \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 二阶连续可微，$\varphi(0)=\psi(0)$．

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t>0,\ x>0,\ x-at>0 \\ u\big|_{x-at=0}=\sin x \\ u\big|_{x=0}=te^t \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t>0,\ x>0 \\ u\big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-hu\right)\Big|_{x=0}=g(t) \end{cases}$$

2. 用通解法求解下列问题

(1) $$\begin{cases} 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ y>0 \\ u\big|_{y=0}=\varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\psi(x) \end{cases}$$

并讨论点 (x_0, y_0) 的依赖区间，和 x 轴上区间 $[1, 2]$ 上的初始数据的确定性区域和影响区域.

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & t>0,\ x\neq 0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, & t>0,\ xy\neq 0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x, y) \end{cases}$$

3. 设二维波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$，在圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上给定初始数据，试求它在 $t>0$ 中解的确定性区域和影响区域.

4. 应用降维法直接从三维波动方程初值问题的 Poisson 公式推出一维波动方程初值问题解的 D′ Alembert 公式.

5. 应用三维波动方程初值问题的 Poisson 公式，推出下列二维

推广的波动方程初值问题解的公式.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 u + c^2 u, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases}$$

6\. (1) 设 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases}$

若 $\varphi(x,y,z) = -\varphi(x,y,-z)$，$\psi(x,y,z) = -\psi(x,y,-z)$，证明 $u(x, y, 0, t) = 0$.

(2) 应用延拓法求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u, \ t > 0, \ z > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z) \\ u|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

7\. 求出下列问题的解

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = yz, \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = xz \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 u, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2 + y^2, \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = xy \end{cases}$

3 分离变量法和特殊函数

本章包含的内容较多，首先是用几个典型的问题讲述了分离变量法，接着围绕分离变量法的需要简明地讨论和介绍了微分方程固有值问题的理论，微分方程的解析理论和特殊函数，最后又回到用分离变量法求解多个自变量偏微分方程的某些经典问题.

3.1 两个自变量时的几个典型问题

3.1.1 一维波动方程的混合问题

$$\text{问题一}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ 0<x<l\\[2ex] u(x,0)=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\\[2ex] u(0,t)=0,\ u(l,t)=0\end{cases}$$

此问题可以用通解法(即特征线法)求解，这在第二章中已讨论过.

此问题也可以用延拓法来求解，即把初始函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 按适当的方式延拓到 $(-\infty,\infty)$ 上得到函数 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ ，然后用 D' Alembert 公式表示问题一的解

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi,\ t>0,\ 0<x<l$$

使得满足边界条件 $u(0,t)=u(l,t)=0$ ，不难验证，只要先将 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 以 $x=l$ 为对称轴奇延拓到 $[0,2l]$ 上. 然后以 $2l$ 为

周期延拓到 $(-\infty, \infty)$ 上则可满足所述的要求，即在一个周期 $[0, 2l]$ 上

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l \\ -\varphi(2l - x), & l \leqslant x \leqslant 2l \end{cases}$$

$\Psi(x)$ 的表达式是类似的．延拓法是以初始问题解的 D′ Alembert 公式为基础的，原则上如果是其它类型的边界条件也可以用延拓法．

本章要讨论的是用分离变量方法来求解问题一，其步骤是：

(i) 先求满足齐次方程和齐次边界条件且变量分离的非零解族，即求方程的形如 $X(x)T(t)$ 的非零解，且满足齐次边界条件，其中 $X(x)$，$T(t)$ 分别表示仅与 x 和 t 有关的待定函数，把之代入方程得

$$X(x)T''(t) = a^2T(t)X''(x)$$

使其变量分离得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

由于上式中左边仅是 t 的函数，右边仅是 x 的函数，要使它们相等只有两边均等于一个待定的常数 $-\lambda$，且由于要使解满足齐次边界条件，所以得到

$$T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0 \tag{1}$$

和

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

这样偏微分方程就被分离为两个常微分方程，称关于 $X(x)$ 的常微分方程的边值问题(2)为固有值问题，要由它来确定使问题(2)有非零解的常数 λ，称这种常数为固有值问题(2)的固有值，称对应的非零解为属于此固有值的固有函数，为了和矩阵的固有值问题相比较，也为了更一般地理解各种线性算子的固有值问题，可把问题(2)写为算子的形式

$$L[X]=\lambda X$$

其中 L 表示线性微分算子 $L=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$，$X(x)$ 属于在 $[0, l]$ 上二阶连续可微且在两个端点取零值的函数空间，一般的在复数域上讨论固有值问题，允许固有值可取复数，对应的固有函数可取复值函数，但本教材中所遇到的微分方程的固有值问题的固有值一定是实的，相应的固有函数也是实值函数，这和实对称矩阵的固有值一定是实的情况很相似，证明方法也是类似的，详细情况不多论述.

设 λ 是固有值问题(2)的固有值，$X(x)$ 是属于此固有值的固有函数，则

$$L[X]\equiv -X''(x)=\lambda X(x)$$

两边乘以 $X(x)$ 并从 0 到 l 积分，左端利用分部积分和 X 满足的齐次边界条件得

$$\int_0^l X'^2(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^l X^2(x)\mathrm{d}x$$

由此必有 $\lambda\geqslant 0$，又若 $\lambda=0$ 时必有 $X'(x)=0$，又由于齐次边界条件必有 $X(x)=0$，所以 $\lambda=0$ 也不是问题(2)的固有值，所以可设 $\lambda>0$，这时

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

由边界条件 $X(0)=0$，得 $c_1=0$，所以 c_2 必不为零，又由边界条件 $X(l)=0$，得

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$$

由此可知固有值是

$$\lambda=\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

相应的固有函数是

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi}{l}x$$

这样就求解得固有值问题(2)的解，求出了它的全部固有值 λ_k 和相应的固有函数 $X_k(x)$.

对于每一个 $\lambda=\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ ，求解方程(1)得

$$T_k(t)=A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t$$

从而得出问题一中满足齐次方程和齐次边界条件分离变量的解族

$$u_k(x, t)=\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$k=1, 2, \cdots$$

(ii) 根据迭加原理设问题一的解为

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

它仍满足齐次方程和齐次边界条件，又由初始条件得

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi a}{l}x$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k\cdot\frac{k\pi a}{l}\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

这是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 按三角函数系 $\sin\frac{k\pi}{l}x$ 的 Fourier 级数展开式，所以可唯一地确定得

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x=\varphi_k$$

$$B_k=\frac{l}{k\pi a}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x=\frac{l}{k\pi a}\psi_k$$

从而得到问题一的级数形式的解

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\psi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

上述分析求问题一的解的方法就是分离变量法，从求解的过程可知，一个中心的环节是求解固有值问题(2)，得到了一列固

有值 $\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ 和相应的固有函数系 $\sin\frac{k\pi}{l}x$，固有函数系构成 $[0, l]$ 区间上一完备的正交系，所得解的级数表达式实质上是把 $u(x, t)$ 按此固有函数系作 Fourier 级数展开（t 作为参变量），所以分离变量法又称为 Fourier 方法，Fourier 正是由于用分离变量方法讨论热传导问题而得到 Fourier 展开的方法.

问题一可解释为描述两端固定的弦在初始数据激发下而产生的横振动问题，所产生的位移函数 $u(x, t)$ 是一个复杂的振动，分离变量法所得的级数表示把一个复杂的振动分解为一些简单的简谐振动的迭加，即

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x, t)$$

其中

$$\begin{aligned}u_k(x, t)&=\left[A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}t\right]\sin\frac{k\pi}{l}x\\&=\left[M_k\sin\left(\frac{k\pi at}{l}+N_k\right)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x\end{aligned}$$

称每一个 $u_k(x, t)$ 为一个驻波，作为时间 t 的函数它表示一个简谐振动，其频率为 $\frac{k\pi a}{l}$，其振幅和 x 点和初始数据有关，初相 N_k 完全由初始数据确定，频率由 a 和 l 确定而和初始数据无关所以称为固有频率，这些驻波中最小频率为 $\frac{\pi a}{l}$ 称之为基频，其它频率为基频的整数倍，称每一个驻波为固有振动. 分离变量法相应于把一个复杂的振动分解为不同频率的驻波的迭加，所以物理上又常称分离变量法为驻波法.

上述求解的过程只是分析. 所得的解还只能说是形式解. 数学上还应该进行综合过程，即验证所得的解给出问题的解，且还要讨论唯一性和稳定性. 从所得的形式解可知，当 $\varphi_k=0\left(\frac{1}{k^4}\right)$，$\psi_k=0\left(\frac{1}{k^3}\right)$ 时，则可以逐项求导直到二阶偏导数，它给出问题一

的古典解，而当 $\varphi_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$，$\psi_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ 时，级数一致收敛于一个连续函数 $u(x,t)$，但不能保证二阶连续可导，它给出问题一的广义解，如果只能保证形式解的级数在更弱的意义下收敛(例如均方收敛)，则 $u(x,t)$ 给出更广意义的广义解. 而解的唯一性和稳定性可从由通解法(即特征线法)直接推出. 还有另一种方法是用能量积分的方法来证明，这种方法具有更大的一般性，可以立即推广到高维波动方程的问题. 若设 $u(x,t)$ 是问题一的解，令

$$E(t) = \int_0^l \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\mathrm{d}x$$

称之为一个能量积分，则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x + 2a^2\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x - 2a^2\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x + 2a^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_0^l \\
&= 0
\end{aligned}$$

即 $E(t)$ 保持一个常数，所以

$$E(t) \equiv E(0) = \int_0^l (\psi^2(x) + a^2\varphi'^2(x))\mathrm{d}x$$

特别，当为齐次初始条件时，

$$E(t) \equiv 0$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0,\ \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0,\ u(x,t) = u(0,t) \equiv 0$$

这样就证明了问题一对应的齐次问题只有零解，从而证明了问题一解的唯一性.

如果以弦振动问题作物理解释，则

$$\frac{\rho}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x \quad \text{表示弦的动能}$$

$$\frac{T}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x \quad \text{表示弦的势能}$$

其中 ρ 为弦的密度，T 为张力的大小，$a^2=\dfrac{T}{\rho}$ 所以除了一个常数因子外，能量积分 $E(t)$ 表示弦的总能量，$E(t)\equiv E(0)$ 表示在振动过程中的能量守恒．又设

$$E_0(t)=\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x$$

也称它是一个能量积分，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_0(t)}{\mathrm{d}t}&=2\int_0^l u(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\\&\leqslant 2\sqrt{\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x}\\&\leqslant 2\sqrt{E_0(t)}\sqrt{E(0)}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{E_0(t)}}{\mathrm{d}t}\leqslant E(0)$$

$$\sqrt{E_0(t)}\leqslant\sqrt{E_0(0)}+\sqrt{E(0)}t$$

所以当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，

$$\sqrt{\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x}\leqslant\sqrt{\int_0^l \varphi^2(x)\mathrm{d}x}+T\sqrt{\int_0^l(\psi^2(x)+a^2\varphi'^2(x))\mathrm{d}x}$$

这就表明在均方模的意义下解对初始数据的连续依懒性.

$$
\text{问题二}\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \ 0 < x < l, \ t > 0 \\
u(x, 0) = 0, \ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \\
u(0, t) = 0, \ u(l, t) = 0
\end{cases}
$$

此时方程是非齐次的，可直接用齐次化原理和分离变量法而求得此问题的解，即由问题一用分离变量法求得解的公式可得问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v(x, t; \tau)}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \ t > \tau, \ 0 < x < l \\
v\big|_{t=\tau} = 0, \ \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} = f(x, \tau) \\
v\big|_{x=0} = 0, \ v\big|_{x=l} = 0
\end{cases}
$$

的解为

$$
v(x, t; \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{k\pi a} f_k(\tau) \sin \frac{k\pi(t-\tau)a}{l} \cdot \sin \frac{k\pi}{l}x
$$

其中

$$
f_k(\tau) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, \tau)\sin\frac{k\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi
$$

由齐次化原理得

$$
u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau)\mathrm{d}\tau
$$

如果根据问题的分析，我们直接把问题二的解设为

$$
u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x
$$

另外把问题二中所有作为 x 的函数也都按固有函数系 $\sin\frac{k\pi}{l}x$ 展开，代入方程和齐次初始条件并比较系数得

$$
\begin{cases}
u''_k(t) = -\left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t) + f_k(t) \\
u_k(0) = 0, \ u'_k(0) = 0
\end{cases}
$$

其中

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, t)\sin\frac{k\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi$$

根据常微分方程初值问题的齐次化原理得

$$u_k(t) = \frac{l}{k\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$

从而也得到问题二同样的解.

$$\text{问题三}\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ 0<x<l \\ u|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

在此问题中边界条件是非齐次的，用分离变量法求混合问题时，首先的一步是通过未知函数的代换使边界条件齐次化，即找个适当的函数 $u_0(x, t)$，使它满足非齐次边界条件 $u_0(0, t) = \mu(t)$，$u_0(l, t) = \mu_2(t)$，则作代换

$$w(x, t) = u(x, t) - u_0(x, t)$$

则可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(x, t) \\ w|_{t=0} = \varphi_1(x),\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x) \\ w|_{x=0} = 0,\ w|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

根据叠加原理，由问题一和问题二解的公式可得到解 $w(x, t)$，从而得出问题三的解

$$u(x, t) = w(x, t) + u_0(x, t)$$

通常可选取 $u_0(x, t)$ 为关于 x 的一次函数，得

$$u_0(x, t) = \mu_1(t) + \left(\frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}\right)x$$

根据上述三个问题的解和叠加原理，可用分离变量法求解更

一般的问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ t>0,\ 0<x<l\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\\ u|_{x=0}=\mu_1(t),\ u|_{x=l}=\mu_2(t)\end{cases}$$

在处理具体问题时，首先的一步是使边界条件齐次化.

对于其它边界条件下一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ t>0,\ 0<x<l\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\\ \left.\left(\alpha_1 u-\beta_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=\mu_1(t),\ \left.\left(\alpha_2 u+\beta_2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=\mu_2(t)\end{cases}$$

其中 $\alpha_i\geqslant 0$, $\beta_i\geqslant 0$, $\alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0$，用分离变量法求解的过程是完全类似的，中心的一个环节是求解固有值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ \alpha_1 X(0)-\beta_1 X'(0)=0,\ \alpha_2 X(l)+\beta_2 X'(l)=0\end{cases}$$

当 $\beta_1=\beta_2=0$ 时是已讨论过的固有值问题. 类似地可以证明其固有值 $\lambda\geqslant 0$，当 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时，即两端均为第二类型的边界条件时，其固有值是 $\lambda_0=0$, $\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2(k=1,2,\cdots)$, $\lambda_0=0$ 对应的固有函数是 1, $\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2$ 对应的固有函数是 $\cos\dfrac{k\pi}{l}x$，固有函数系 $\left\{1,\cos\dfrac{k\pi}{l}x\ |k=1,2,\cdots\right\}$ 仍构成 $[0,l]$ 上完备的正交系. 对于其它的边界条件，固有值是正的，而且全部固有值可以排列为 $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$，且 $\lambda_k\to\infty$ ($k\to\infty$ 时)，对应的固有函数系 $\{X_k(x)|k=1,2,\cdots\}$ 仍构成 $[0,l]$ 上的完备的正交系.

用分离变量方法解非齐次边界条件下的混合问题时，首先的

一步也是作未知函数的代换 $w(x, t) = u(x, t) - u_0(x, t)$ 使边界条件齐次化，其中 $u_0(x, t)$ 为满足非齐次边界条件的任意函数，通常当两端均为第二类型的边界条件时可选 $u_0(x, t) = x[A(t) + B(t)x]$，其它边界条件时选 $u_0(x, t) = A(t) + B(t)x$，$A(t)$ 和 $B(t)$ 根据 $u_0(x, t)$ 满足的非齐次边界条件来确定.

$$
\text{问题四}\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0,\ \left.\left(hu + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0 \end{cases}
$$

用分离变量法求解，先求方程形如 $X(x)T(t)$ 且满足齐次边界条件的解，代入方程和边界条件且使变量分离得

$$
T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{3}
$$

和固有值问题

$$
\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0,\ hX(l) + X'(l) = 0 \end{cases} \tag{4}
$$

先求解固有值问题(4)，若 λ 为固有值，$X(x)$ 为对应的固有函数，则

$$
-X'' = \lambda X
$$

上式两边乘以 X 后从 0 到 l 积分，左端进行分部积分并注意到边界条件得

$$
hX^2(l) + \int_0^l X'^2(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_0^l X^2 \mathrm{d}x
$$

所以固有值 $\lambda > 0$. 当 $\lambda > 0$ 时，

$$
X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x
$$

代入齐次边界条件得

$$
A = 0,\ B \neq 0,\ \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l = 0
$$

所以固有值 λ 是满足方程

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$$

的正解，令 $v=\sqrt{\lambda}l$，则

$$\operatorname{tg}v = -\frac{v}{lh}.$$

如图(3.1)，在 (v, f) 坐标平面上，利用图解法，上述方程的正解是曲线 $f=\operatorname{tg}v$ 和直线 $f=-\dfrac{v}{lh}$ 在右半平面交点的横坐标 v_1，v_2，…，v_k，…，显然 $0<v_1<v_2<\cdots<v_k<\cdots$ 且 $v_k\to+\infty$，相应的得固有值 $\lambda_k=\left(\dfrac{v_k}{l}\right)^2$，对应的固有函数 $X_k(x)=\sin\sqrt{\lambda_k}x$.

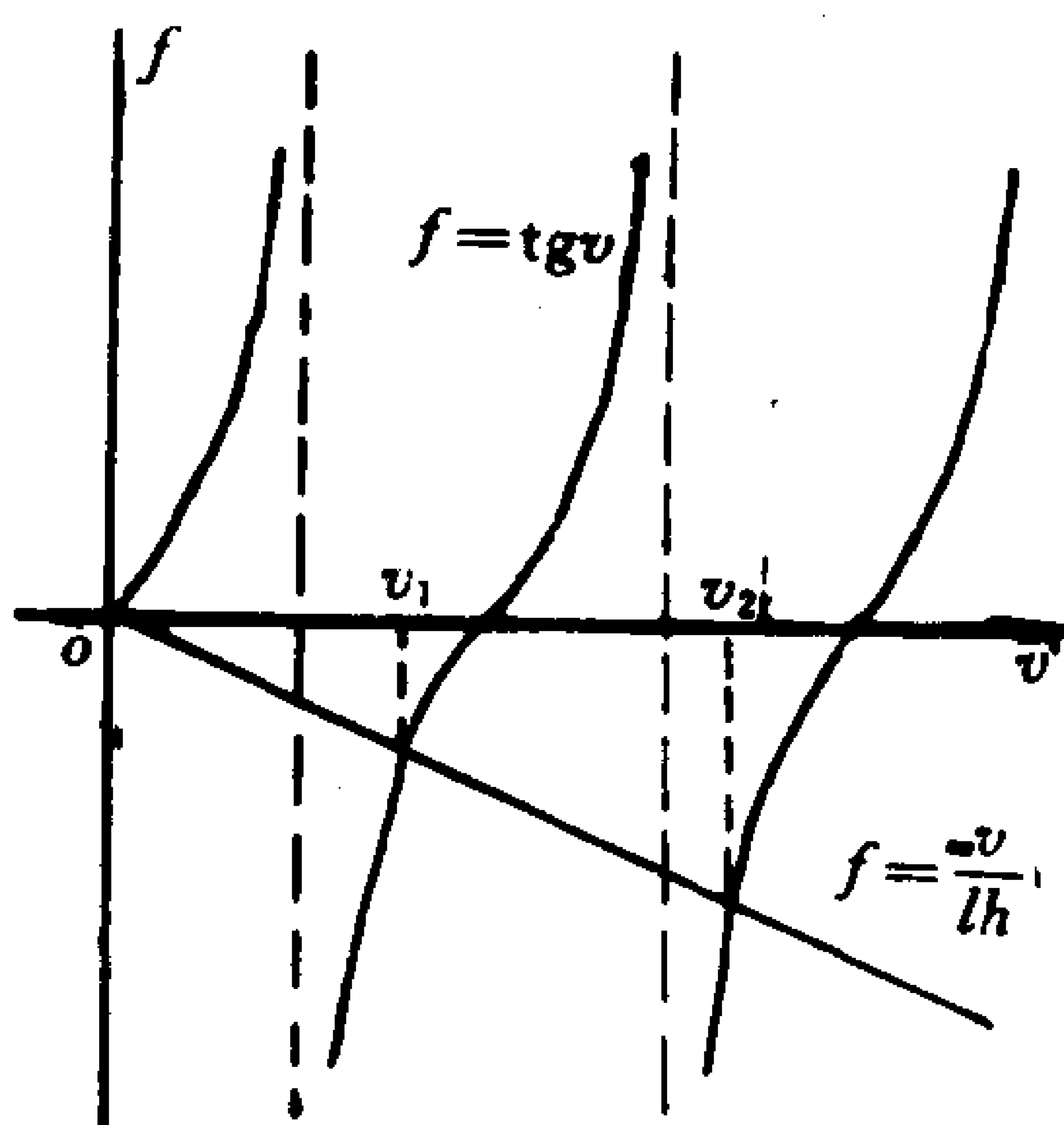


图 3.1

不难证明固有函数系 $\{X_k(x)|k=1, 2, \cdots\}$ 在 $[0, l]$ 上正交，事实上由于

$$-X''_n(x) = \lambda_n X_n(x)$$

$$-X''_m(x) = \lambda_m X_m(x)$$

以 X_m 和 $X_n(x)$ 分别乘上列的第一式和第二式，后相减再从 0 到 l 积分，利用分部积分和边界条件得

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = (X_nX'_m - X_mX'_n)\big|_0^l = 0$$

所以当 $n\neq m$ 时，

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0$$

又记

$$M_k = \|X_k(x)\|^2 = \int_0^l X_k^2(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_k} x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{2v_k}\sin 2v_k\right)$$

对于每一个 $\lambda = \lambda_k$，方程(3)的解为

$$T_k(t) = (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} at + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} at)$$

根据叠加原理，令问题四的解为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} at + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} at) \sin \sqrt{\lambda_k} x$$

由初始条件得

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \sqrt{\lambda_k} x \\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_k a \sqrt{\lambda_k}) \sin \sqrt{\lambda_k} x \end{cases}$$

这是定义在 $[0, l]$ 上的函数按正交系 $\{\sin \sqrt{\lambda_k} x \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 的广义的 Fourier 级数展开式，根据正交性得

$$A_k = \frac{1}{M_k} \int_0^l \varphi(x) \sin \sqrt{\lambda_k} x \mathrm{d}x = \varphi_k$$

$$B_k = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}} \frac{1}{M_k} \int_0^l \psi(x) \sin \sqrt{\lambda_k} x \mathrm{d}x = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}} \psi_k$$

最终得到问题四的解

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \sqrt{\lambda_k} at + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}} \psi_k \sin \sqrt{\lambda_k} at\right) \sin \sqrt{\lambda_k} x$$

3.1.2 一维热传导方程的混合问题

设 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t > 0, \ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

此问题不能用通解法，它是本教材中讨论的关于热传导方程的第一个定解问题，所以也还不能用延拓方法求解. 但是完全类似于一维波动方程的混合问题，可以用分离变量法求解.

先求满足齐次方程和齐次边界条件的变量分离的非零解 $X(x)T(t)$，代入方程和边界条件且使变量分离得

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{5}$$

和固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

解固有值问题得固有值 $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$，对应的固有函数为 $\sin\frac{k\pi}{l}x,\ k = 1, 2, \cdots$

对每一个 $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$，解方程(5)得

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$$

根据叠加原理. 令

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x$$

根据初始条件得

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

得

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \varphi_k$$

最终得到所设一维热传导方程混合问题的解

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x$$

值得注意的是，当初值函数 $\varphi(x)$ 不够光滑时，例如设 $\varphi(x)$ 在 $[0, l]$ 上仅分段光滑，有一些第一类的间断点，这时不能得到在 $t \geqslant 0$ 上使 $u(x, t)$ 连续的解，所得到的级数只能是定解问题的

广义解，这时，当点 (x, t) 从区域 $t>0$ 按不同的方式趋于 $\varphi(x)$ 的间断点 $(x_0, 0)$ 时，$u(x, t)$ 会有不同的极限，但从解的级数表达式可知，由于有指数衰减的因子，当 $t>0$ 时，$u(x, t)$ 是无穷次连续可微的，在区域 $t>0$ 中 $u(x, t)$ 仍是方程的古典解，这和波动方程的情况有本质的不同，波动方程中初始函数的间断性会沿着特征线传播. 如果把此混合问题解释为有界杆的热传导问题，解的结果表明，虽然初始温度分布有间断，但是在很短的时间以后温度的分布就变得十分的光滑. 可以证明，当 $\varphi_k = 0\left(\frac{1}{k^2}\right)$ 时，所得的级数解给出问题的古典解. 此问题解的唯一性和稳定性由下述热传导方程的极值原理立即可证. **热传导方程的极值原理：若** $u(x, t)$ **在** $\overline{\Omega} = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ **上连续，在** $\{0 < x < l, 0 < x \leqslant T\}$ **上满足热传导方程** $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ **，则** $u(x, t)$ **在** $\overline{\Omega}$ **上的最大最小值一定可以在底边** $\{t = 0, 0 \leqslant x \leqslant l\}$ **或侧边** $\{x = 0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ **和** $\{x = l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ **上达到**. 如果把 $u(x, t)$ 解释为无热源且侧面又无热交换的杆的温度分布，极值原理表明其最高和最低温度一定可以在初始温度或两个端点的温度达到. 极值原理的数学证明也不复杂，但均一律简略.

关于其它边界条件和非齐次方程，非齐次边界条件下用分离变量法求一维热传导方程的混合问题和 3.1.1 目中的处理相同.

3.1.3 二维调和方程和 Poisson 方程的边值问题

在前两目讨论的混合问题中，有一个自变量视作时间变量，相应的提初始条件，余下的变量视作空间变量，相应的提边界条件，用分离变量法求解混合问题时，分离变量后微分方程的固有值问题总是关于空间变量的函数来提的. 对于二维调和方程的边值问题，则需根据具体问题的特点，适当的选取关于某个自变量的函数在某种齐次边界条件下提出微分方程的固有值问题.

$$
\text{问题一}\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ 0<x<a,\ 0<y<b \\
u|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=0 \\
u|_{y=0}=\varphi(x),\ u|_{y=b}=\psi(x)
\end{cases}
$$

用分离变量法求解，先求满足方程和满足关于边界 $x=0$ 和 $x=a$ 的齐次边界条件的变量分离的非零解 $X(x)Y(y)$，代入方程和齐次边界条件，使变量分离得

$$
Y''(y)-\lambda Y=0 \tag{7}
$$

和固有值问题

$$
\begin{cases}
X''(x)+\lambda X=0 \\
X(0)=0,\ X(a)=0
\end{cases} \tag{8}
$$

解固有值问题(8)得固有值 $\lambda=\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2$，对应的固有函数是 $\sin\dfrac{k\pi}{a}x,\ k=1,2,\cdots$.

对于每一个 $\lambda=\lambda_k$，解方程(7)得

$$
Y_k(y)=A_k\mathrm{ch}\frac{k\pi}{a}y+B_k\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}y
$$

根据叠加原理，令

$$
u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\mathrm{ch}\frac{k\pi}{a}y+B_k\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}y\right)\sin\frac{k\pi}{a}x
$$

根据另一组边界 $y=0$ 和 $y=b$ 上的边界条件得

$$
\begin{cases}
\varphi(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{a}x \\
\psi(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\mathrm{ch}\frac{k\pi}{a}b+B_k\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}b\right)\sin\frac{k\pi}{a}x
\end{cases}
$$

由此得

$$
\begin{cases}
A_k=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x=\varphi_k \\
A_k\mathrm{ch}\dfrac{k\pi}{a}b+B_k\mathrm{sh}\dfrac{k\pi}{a}b=\psi_k
\end{cases}
$$

由此可唯一地确定 A_k 和 B_k，从而得出问题一的解

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_k \text{ch}\,\frac{k\pi}{a}y + \frac{\psi_k - \varphi_k \text{ch}\left(\frac{k\pi}{a}b\right)}{\text{sh}\,\frac{k\pi}{a}b}\text{sh}\,\frac{k\pi}{a}y\right\}\sin\frac{k\pi}{a}x$$

显然，如果在此问题一中，把关于边界 $x=0$ 和 $x=a$ 的边界条件改为非齐次，而关于边界 $y=0$ 和 $y=b$ 改为齐次时，则问题可类似处理，从而把全部边界上的条件改为非齐次时，根据叠加原理也就可用分离变量法求解.

问题二 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=b} = 0 \end{cases}$

这是非齐次方程的边值问题，它不能应用初值问题或混合问题时的齐次化原理，但它也可用未知函数的代换使方程齐次化，即先求非齐次方程的一个特解 $u_0(x, y)$，则令 $w(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y)$ 则可使方程齐次化. 在一般情况下总可取

$$u_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

其中 $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$.

处理这种齐次方程的另一方法是把未知函数 $u(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 和定解问题中其它 x 的函数均按固有函数系 $\left\{\sin\frac{k\pi}{a}x\right\}$ 展开，即令

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\sin\frac{k\pi}{a}x$$

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)\sin\frac{k\pi}{a}x$$

代入方程和边界条件可得

$$u''_k(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 u_k(y) = f_k(y)$$

$$u_k(0) = 0,\ u_k(b) = 0$$

解此边值问题可确定 $u_k(y)$，从而得到问题二的解.

问题三 $\begin{cases} \Delta_2 u = 0,\ r < a \\ u|_{r=a} = f \end{cases}$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 此问题解的积分表达式在复变函数中已得到过，即一个在圆内调和在闭圆上连续的函数可以由它在圆周上的值用泊松积分公式表示. 现在要用分离变量法得出解的级数表示，也可以重新得出泊松积分公式.

在 (x, y) 坐标下，由于问题的区域是一个圆域而非矩形域，所以不能直接在 (x, y) 自变量下用分离变量法，所以首先利用极坐标 (r, θ)，则问题变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,\ 0 \leqslant r < a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ u|_{r=a} = f(\theta) \end{cases}$$

把直坐标下的圆域变为极坐标 (r, θ) 下的矩形域 $0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 而圆域中的边界圆周仅变到矩形域中的一侧边 $r = a(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，而矩形域中的两条底边 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi(0 \leqslant r \leqslant a)$ 实际上对应于圆域中的同一条直线段，矩形域的另一侧边 $r = 0(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 实际上只对应于圆域中的坐标原点，在原坐标系下原点是一个正常的点，而在极坐标下 $r = 0$ 上的点是方程的奇点，这种奇性的出现完全是由于坐标系的一种特殊的选取的结果，根据上述分析，在矩形域的边界上，除了非齐次边界条件 $u|_{r=a} = f(\theta)$ 外，还应该加入下列边界条件

$$\lim_{r \to 0} u(r, \theta) \text{ 存在或在 } r = 0 \text{ 附近 } u(r, \theta) \text{ 有界},$$

$$u(r, \theta)|_{\theta=0} = u(r, \theta)|_{\theta=2\pi},\ \left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=2\pi}$$

其中称第一个边界条件为自然边界条件，后两个条件称为周期性条件，它相当于可以把 $u(r, \theta)$ 光滑地延拓为周期为 2π 的周期函数. 显然周期性条件也是齐次边界条件.

下面用分离变量法求解，设 $R(r)\Phi(\theta)$ 为满足齐次方程和周期性条件的非零解，代入方程和周期性边界条件，使变量分离得

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0 \tag{9}$$

和固有值问题

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0\\ \Phi(0)=\Phi(2\pi),\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\end{cases} \tag{10}$$

解固有值问题(10)得固有值 $\lambda=\lambda_n=n^2$，对应的固有函数为 $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $n=0,1,2,\cdots$，即 $\lambda=\lambda_0=0$ 时对应着一个线性无关的固有函数，$\lambda=\lambda_n=n^2(n\in N)$ 时对应着两个线性无关的固有函数 $\cos n\theta$, $\sin n\theta$. 对于每一个 $\lambda_n=n^2$，解方程(9)得

$$R_0=a_0+b_0\ln r$$

$$R_n(r)=a_nr^n+b_n\frac{1}{r^n},\quad n=1,2,\cdots$$

所以满足齐次方程和周期性边界条件且在 $r=0$ 附近保持有界的变量分离的解族为

$$1,\ r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta,\ n\in N$$

根据叠加原理

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nr^n\cos n\theta+b_nr^n\sin n\theta)$$

又由 $r=a$ 时的边界条件得

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_0a^n\cos n\theta+b_na^n\sin n\theta)$$

所以

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{a^n}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{a^n}f_{nc}\quad n=0,1,2,\cdots\\[2ex] b_n=\dfrac{1}{a^n}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{a^n}f_{ns}\quad n=1,2,\cdots\end{cases}$$

最终得

$$u(r,\theta)=\frac{f_{0c}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^nf_{nc}\cos n\theta+\left(\frac{r}{a}\right)^nf_{ns}\sin n\theta\right]$$

从上述分析所得的形式解中不难看出，当 $f(\theta)$ 连续时，f_{nc} 和 f_{ns} 一致有界，所以当 $r<a$ 时，所得级数可以逐项求导任意多次，所以在 $r<a$ 时，$u(r,\theta)$ 满足调和方程，另外还要证明 $\lim\limits_{r\to a}u(r,\theta)=f(\theta)$，显然如果 $f(\theta)$ 仅仅是连续函数时，不能直接利用交换极限与求和的顺序来证明，这是因为在逐点收敛的意义下，一个连续函数一般是不能表为 Fourier 级数的，但是可以用另外的方式严格地证明所得级数解也满足这一边界条件. 从上述解的级数表达式中还可以看出，若 $f(\theta)$ 分段连续，在某些点上有第一类间断，当 $r<a$ 时 $u(r,\theta)$ 仍然满足调和方程，即边界值的间断性并不影响区域内解的正则性，当然这时对于定解问题来说所得的级数解只能是广义解，但对于 $f(\theta)$ 的连续点它仍然满足边界条件.

当 $r<a$ 时，把 f_{nc} 和 f_{ns} 的积分表示代入 $u(r,\theta)$ 的级数表达式并交换积分与求和的顺序可得

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\\
&\quad\cdot\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\cos n\varphi\cos n\theta+\sin n\varphi\sin n\theta)\right]\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)\right]\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\left\{1+2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r}{a}e^{i(\varphi-\theta)}\right]^n\right\}\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

这样又重新推出关于调和函数的 Poisson 积分公式.

对于圆域的调和方程的第三边值问题

$$\Delta_2 u=0,\ r<a$$

$$\left(hu+\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{r=a}=f$$

其中 $h>0$，根据分离变量法可直接令

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n\cos n\theta+b_n r^n\sin n\theta)$$

然后代入边界条件，根据 Fourier 级数展开可以唯一地确定 a_0，a_n 和 b_n，从而给出问题的解.

对于圆域的调和方程的第二边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\ r<a\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=a}=f\end{cases}$$

这时它有解的必要充分条件是

$$\int_{r=a} f\mathrm{d}s=0,\ 即\ \int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta=0$$

当此条件满足时，用分离变量法可令

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n\cos n\theta+b_n r^n\sin n\theta)$$

根据边界条件可以唯一地确定 a_n 和 b_n，$n=1,2,\cdots$ 从而得出所设问题带有一任意常数项 $\frac{a_0}{2}$ 的解.

对于圆域泊松方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=g,\ r<a\\ \left(\alpha u'+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{r=a}=0\end{cases}$$

其处理方法是类似的，即或者先找非齐次方程的一个特解，后作未知函数代换使问题转化为调和方程的边值问题. 或者在极坐标下，把相关函数作为 θ 的函数均按三解函数系 $\{1,\cos n\theta,\sin n\theta\mid n=1,2,\cdots\}$ 展开比较系数而得一系列自变量为 r 的常微分方程的边值问题，继而得出问题的解.

从前边的推导可知，在极坐标 (r,θ) 下，可得二维调和方程

变量分离的解族

$$\{1, r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta\} \text{ 和 } \left\{\frac{1}{r^n}\cos n\theta, \frac{1}{r^n}\sin n\theta\right\} \text{ 和 } \ln r$$

其中 $n = 1, 2, \cdots$. 若回到坐标 (x, y)，第一个解族是 $z^n = (x + yi)^n$ 的实部和虚部，它们是 x，y 的齐次调和多项式. 对于圆域内的边值问题用第一组解的线性迭加来构造解. 对于圆域外部区域的边值问题，通常还要求在无穷远处解保持有界，这时用第二组解和 1 来构造解. 如果在一个环域 $a < r < b$ 内来解边值问题，则需要上述全部解的线性迭加来构造解.

根据复变函数的理论，存在保角变换使较一般的平面区域变为单位圆. 所以对于较一般域二维调和方程的边值问题可作自变量的变数代换，使此一般域变为单位圆，而在新的自变量下未知函数仍然满足调和方程，所以复变函数的理论和方法是解决二维调和方程边值问题的强大工具，这方面有许多专门的著作讨论.

调和方程边值问题解的唯一性和稳定性可用调和函数的极值原理推出. **调和函数的极值原理：若 $u(x, y)$ 在闭区域 $\bar{\Omega}$ 上连续，在 Ω 内调和，则除了 $u(x, y)$ 为一个常数的情况外，$u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大最小值一定只能在 Ω 的边界上达到，而且在边界上达到最大值的点必有 $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$，在边界上达到最小值的点必有 $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$，而 n 是边界点的外法向**. 如果把 $u(x, y)$ 解释为 Ω 内无热源的二维的温度分布，则极值原理表明，除了在 $\bar{\Omega}$ 上温度处处相同的情况外，最高最低的温度只能在 Ω 的边界点达到，而达到最高温度的边界点处必然有 $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$，达到最低温度的边界点处必然 $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$. 由此极值原理立即可推出调和方程第一边值问题解的唯一性和稳定性. 另外也不难推出第三边值问题解的唯一性和第二边值问题的解除了一个常数项外的唯一性. 例如，若 $u(x, y)$ 在边界点 N_0 达到正的最大值，则必然有 $u(N_0) + h\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_{N_0}} > 0$. 若

在边界点 N_1 达到负的最小值，则必然有 $u(N_1)+h\dfrac{\partial u(N_1)}{\partial n_{N_1}}<0$，其中 $h>0$，这就可证明第三边值问题解的唯一性.

*3.1.4 杆和板的横振动和板的平衡

在讨论均匀的弹性杆的横向振动问题时可得到四阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4}{\partial x}=0$$

其中 t 为时间，x 为杆的中心轴的坐标，u 为横向位移，a^2 是杆的物理参数，为了完全确定杆的振动过程还应该提初始条件和边界条件，初始条件为

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\quad（初位移）$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\quad（初位移速度）$$

对于杆的两个端点 $x=0$ 和 $x=l$ 应根据具体的情况提边界条件，最基本的边界条件有三种：

夹住端　　$u=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=0$，

简支端　　$u=0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，

自由端　　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$.

如果讨论两端均为简支的情况，可得混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\ 0<x<l,\ t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\\ u|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0\end{cases}$$

用分离变量法求解，设 $X(x)T(t)$ 是满足齐次方程和齐次边界条件的非零解，代入方程和边界条件，使变量分离得

$$T''_{(t)} + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{11}$$

和固有值问题

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X''(0) = 0,\ X(l) = X''(l) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

解固有值问题(12)得固有值 $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4$，对应的固有函数 $X_4(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x,\ k = 1,\ 2,\ \cdots$，对于每一个 λ_k 解方程(11)得

$$T_k(t) = A_k\cos a\sqrt{\lambda}_k t + B_k\sin a\sqrt{\lambda}_k t$$

根据叠加原理令

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\sqrt{\lambda}_k at + B_k\sin\sqrt{\lambda}_k at)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

据初始条件得

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}B_k a\sqrt{\lambda}_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

从而最终得

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k\cos\sqrt{\lambda}_k at + \frac{1}{a\sqrt{\lambda}_k}\psi_k\sin a\sqrt{\lambda}_k t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中

$$\varphi_k = \frac{l}{2}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$\psi_k = \frac{l}{2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

在讨论均匀的弹性板的横振动问题时可得到四阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\Delta_2^2 u = f(x,\ y,\ t)$$

其中 t 为时间，$(x,\ y)$ 为板的中心平面区域 Ω 的坐标，$u(x,\ y,\ t)$ 为横向位移，f 为外加的力源，Δ_2^2 是二维重调和算子 $\Delta_2^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} +$

$2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$，类似的还应该提初始条件和边界条件，边界条件也有三种基本情况，夹住的边界条件是 $u=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$；简支的边界条件是 $u=0$，$K\sigma\dfrac{\partial u}{\partial n}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial n^2}=0$，其中 K 是边界曲线的曲率，σ 是介质参数，n 为边界的外法向；自由的边界条件形式较为复杂，不再列出.

如果讨论平板的平衡，则位移 $u(x, y)$ 满足二维重调和方程 $\Delta_2^2 u=0$ 或 $\Delta_2^2 u=f(x, y)$，再加入边界条件得边值问题. 例如讨论一矩形弹性平板的平衡时有下列边值问题

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0,\ 0<x<a,\ 0<y<b$$

$$u|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=0,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=a}=0$$

$$u|_{y=0}=g_1(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=g_2(x),\ u|_{y=b}=g_3(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}=g_4(x)$$

从方程可以看到，若设 $X(x)Y(y)$ 为齐次方程满足齐次边界条件的非零解，代入方程可得

$$\frac{X^{(4)}}{X}+2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y}+\frac{Y^{(4)}}{Y}=0 \tag{13}$$

按一般的分离变量法不能分开成两个常微分方程. 但是在此问题中由于下列两固有值问题

$$\begin{cases}\dfrac{X^{(4)}}{X}=\lambda \\ X(0)=X''(0)=0,\ X(l)=X''(l)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{X''}{X}=-\mu \\ X(0)=0,\ X(l)=0\end{cases}$$

有共同的特征函数 $X_k(x)=\sin\dfrac{k\pi}{l}x$，$k=1, 2, \cdots$，分别对应的

固有值是 $\lambda=\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4$ 和 $\mu=\mu_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$．所以如果取 $X(x)=X_k(x)$，代入(3)得

$$Y^{(4)}(y)-2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2Y''(y)+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4Y(y)=0$$

求解此方程得

$$Y_k(y)=A_k\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{l}y}+B_ky\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{l}y}+C_k\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{l}y}+D_ky\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{l}y}$$

从而仍然得出满足齐次方程和齐次边界条件的解族 $X_k(x)Y_k(y)$.

根据叠加原理，令

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{l}y}+B_ky\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{l}y}+C_k\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{l}y}+D_ky\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{l}y}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

又由 $y=0$ 和 $y=b$ 时的四个边界条件可唯一的确定出 A_k，B_k，C_k，D_k，从而得出问题的解.

3.2 常微分方程固有值问题

用分离变量法解定解问题中心的一环是求解固有值问题，本节介绍一般二阶线性常微分方程固有值问题的基本理论，它是分离变量法的理论基础.

3.2.1 Stum-Liouville 固有值问题理论

用分离变量法解定解问题常常需求解二阶常微分方程的固有值问题

$$\begin{cases}a_2(x)X''+a_1(x)X'+a_0(x)X+\lambda X=0,\ a<x<b\\ \alpha_1X(a)-\beta_1X'(a)=0,\ \alpha_2X(b)-\beta_2X'(b)=0\end{cases}$$

其中 $a_i(x)$，$a'_2(x)\in C[a,b]$，$a_2(x)\geqslant a_2>0$，$a_0(x)\leqslant 0$，$\alpha_i\geqslant 0$，$\beta_i\geqslant 0$，$\alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0$．方程两端乘上一个函数 $\rho(x)>0$，使得方程变为自共轭方程，使上述问题变为等价的下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)X + \lambda\rho(x)X = 0,\ a < x < b \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $k(x)$, $k'(x)$, $q(x)$, $\rho(x) \in C[a, b]$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$. 事实上只要取

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{a_1(x) - a'_2(x)}{a_2(x)}\mathrm{d}x}$$

则 $k(x) = \rho(x)a_2(x)$, $q(x) = -\rho(x)a_0(x) \geqslant 0$. 称固有值问题(1)为 Stum-Liouville 固有值问题，把问题(1)写为算子的形式则为

$$L[X] = \lambda\rho(x)X$$

其中 $L = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)$, $X(x)$ 属于在 $[a, b]$ 上二阶连续可微且满足(1)中所列的齐次边界条件的函数空间，一般而论固有值允许取复值，相应的固的函数可取复值函数，但可证明，S-L 问题的固有值总是实的，从而固有函数也总可取为实值函数.

S-L **固有值问题的理论给出下列的结果:**

(i) **问题(1)的固有值总是实的,**

(ii) **问题(1)的固有值 $\lambda \geqslant 0$, 且有零固有值的充要条件是问题(1)的边界条件均是第二类边界条件且 $q(x) \equiv 0$, 显然这时 $\lambda = 0$ 对应的固有函数是 1,**

(iii) **不同的固有值所对应的固有函数 $X_n(x)$ 和 $X_m(x)$ 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交，即**

$$\int_a^b \rho(x)X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = 0$$

(iv) **每一个固有值均是单重的，即一个固有值只对应于一个线性无关的固有函数.**

(v) **固有值一定存在，而且全部固有值一定是一个无穷的序列 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots$, 且 $\lambda_k \to +\infty$, 若无零固**

有值，则可取固有值从 λ_1 开始.

(vi) **固有函数系 $X_k(x)$, $k=0, 1, 2, \cdots$ 构成 $[a, b]$ 上有权函数 $\rho(x)$ 的完备的正交系，而且若 $f(x) \in C^2[a, b]$，且满足问题(1)相同的齐次边界条件时，则在一致收敛的意义下 $f(x)$ 有下列广义的 Fourier 级数展开式**

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x)$$

其中

$$a_k = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) X_k(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x) X_k^2(x) \mathrm{d}x}$$

S-L 固有值问题数学上属于一种自共轭的固有值问题，在 n 维向量空间中自共轭固有值问题就是对称矩阵 A 的固有值问题

$$AX = \lambda BX$$

其中 X 是 n 维空间的向量，B 是一个正定对称的加权矩阵. 当 B 为单位矩阵时就是通常的矩阵 A 的固有值问题. 把 S-L 固有值问题和对称阵的固有值问题加以类比是有益和恰当的，尤其是它们的固有值均是实的，它们的固有向量系均构成加权内积空间中完备的正交系.

第一节中讨论过的较简单的二阶常微分方程固有值问题求解的结果可以作为 S-L 固有值问题理论的验证. 对于一般的证明，前四条的证明较简单，无需更多的数学工具，有的和对称矩阵特征值问题的证明相类似. 后两条的证明需用到积分方程，变分学等数学知识，有一套具体地求固有值和固有函数的理论和方法，不多论述. 今证明分别属于两个不同的固有值 λ_n 和 λ_m 的固有函数 $X_n(x)$ 和 $X^m(x)$ 的带和权正交性，事实上，因为

$$L(X_n) = \lambda_n \rho(x) X_n$$

$$L(X_m) = \lambda_m \rho(x) X_m$$

上列第一式乘以 X_m，第二式乘 X_n，两式再相减后从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b (X_m L[X_n] - X_n L[X_m])\mathrm{d}x = (\lambda_n - \lambda_m)\int_A^b \rho(x) X_n X_m \mathrm{d}x$$

得

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)X_n\frac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}x} - k(x)X_m\frac{\mathrm{d}X_n}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x$$

$$= (\lambda_n - \lambda_m)\int_A^b \rho(x) X_n X_m \mathrm{d}x$$

由边界条件得

$$\int_a^b \rho(X) X_n X_m \mathrm{d}x = 0$$

例 1 求解固有值问题

$$\begin{cases} X'' + aX' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases}$$

不难看出方程两边乘上 $\rho(x) = \mathrm{e}^{ax}$，则可变为 S-L 问题. 解上述固有值问题得固有值为

$$\lambda_k = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \cdots$$

对应的固有函数是

$$\lambda_k(x) = \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \cdots$$

显然，它们构成 $[0, l]$ 上有权函数 e^{ax} 完备的正交系.

S-L 问题中，如果区域 $[a, b]$ 的端点是方程的奇点，但奇性不太高时，则 S-L 理论仍然成立，以端点 a 加以述明如下，若 $k(x) = (x-a)k_1(x)$，$q(x) = \dfrac{q_1(x)}{x-a}$，$k_1(x)$，$k'_1(x)$，$q_1(x) \in C[a, b]$ 且 $k_1(x) \geqslant k_1 > 0$，$q_1(x) \geqslant 0$. **这时在 S-L 问题(1)中端点 $x = a$ 的齐次边界条件** $\left(\alpha_1 X - \beta_1\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=a} = 0$，**应该用有界**

性条件代替，即应改为在 $x=a$ 附近 $X(x)$ 有界，通常记为 $|X(a)|<+\infty$，称这种边界条件为自然边界条件，这时 S-L 理论仍然成立.

例 2　γ 阶 Bessell 方程的固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)-\dfrac{\gamma^2}{x}X+\lambda xX=0 \\ |X(0)|<+\infty,\ \alpha X(l)+\beta X'(l)=0 \end{cases}$$

这时端点 $x=0$ 就是上述的奇点，S-L 理论仍然成立，固有值为 $0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots$，$\lambda_k+\infty$，对应的固有函数系 $X_k(x)$ 构成 $[0,l]$ 上完备的带权函数 x 的正交系.

例 3　Legendre 方程的固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda X=0,\ |x|<1 \\ |X(\pm 1)|<+\infty \end{cases}$$

这时两个端点 $x=-1$ 和 $x=1$ 均是所述的奇点，S-L 理论仍然成立，可以证明它的固有值是 $\lambda=\lambda_n=n(n+1)$，$n=0,1,2,\cdots$，对应的固有函数系是 Legendre 多项式系 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$，它构成 $[-1,1]$ 上完备的正交系.

S-L 问题(1)还可以推广到无界区间的情况，在一定的条件下 S-L 的基本理论仍保持成立.

例 4　Hermite 方程的固有值问题

$$\begin{cases} X''-2xX'+\lambda X=0, & |x|<\infty \\ \text{当 } x\to\pm\infty \text{ 时}, & |X(x)| \text{ 增加不超过多项式} \end{cases}$$

化为自共轭的形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x^2}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda e^{-x^2}X=0 \\ \text{当 } x\to\pm\infty \text{ 时}, \quad |X(x)| \text{ 不超过多项式} \end{cases}$$

可以证明，它的固有值是 $\lambda=2n$，$n=0,1,2,\cdots$，对应的固有函数系是 Hermite 多项式函数系

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \cdots$$

它构成区间 $(-\infty, +\infty)$ 上完备的带有权函数 e^{-x^2} 的正交系.

在 S-L 问题(1)中，如果 $k(a) = k(b)$ 时，还可以提具有周期性边界条件的固有值问题，即

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{dX}{dx}\right) - q(x)X + \lambda\rho(x)X = 0 \\ X(a) = X(b),\ X'(a) = X'(b) \end{cases}$$

这时一个特征值可以对应着两个线性无关的固有函数，但应用正交化手续，也总可以设它们是带权函数 $\rho(x)$ 在 $[a, b]$ 上正交. 这时固有值也是一非负单调增加趋于无穷的序列，固有函数系构成 $[a, b]$ 上完备的带权函数 $\rho(x)$ 的正交系. 最简单的例子是

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(2\pi),\ X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$

固有值是 $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \cdots$，固有函数系是三角函数系 $1, \cos nx, \sin nx$.

在理论和应用中也常出现 S-L 理论不再成立的常微分方程的固有值问题，通常是由于端点的奇性太高或者区间无穷所致，这时固有值的全体可以是一个区间，或者既有一些离散的值又取一个区间上的值，这些问题已有一些专门的著作讨论. 最为简单的是固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad |x| < \infty \\ \text{当 } x \to \pm\infty \text{ 时},\ X(x) \text{ 保持有界} \end{cases}$$

或者当 $x \to \pm\infty$ 时 $X(x)$ 保持有界的条件可以放宽到它不超过一个多项式的增长，显然，这时的固有值是全体非负实数 $\lambda = w^2$，对应的固有函数族是 $1, \cos wx, \sin wx$，有趣的是在广义函数的意义下，固有函数系也构成 $(-\infty, \infty)$ 上完备的正交系而有下列公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos wx \mathrm{d}x = 2\pi\delta(w), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin wx \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos w_1 x \sin w_2 x \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos w_1 x \cos w_2 x \mathrm{d}x = \pi(\delta(w_1 + w_2) + \delta(w_2 - w_1))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin w_1 x \sin w_2 x \mathrm{d}x = \pi(\delta(w_2 - w_1) - \delta(w_1 + w_2))$$

其中 $\delta(w)$ 表示脉冲函数，形式地定义是当 $w \neq 0$ 时 $\delta(w) = 0$，当 $w = 0$ 时 $\delta(w) = \infty$. 在后续的内容中将介绍这些公式的意义，因为在古典的意义下上述积分是无意义的.

3.2.2 分离变量法求解两个自变量二阶线性偏微分方程定解问题的一般格式

应用 S-L 理论，现在就可以写出某些用分离变量法求解某些变系数二阶线性方程定解问题的一般格式，不失一般，以双曲型方程的混合问题加以讨论，它对于抛物型方程的混合问题或椭圆型方程的边值问题也是类似的. 设混合问题

$$\begin{cases} b_2(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b_1(t)\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \qquad\qquad + (a_0(x) + b_0(t))u,\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ \left.\left(\alpha_1 u - \beta_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = 0,\ \left.\left(\alpha_2 u + \beta_2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

其中 $b_2(t) \geqslant b_2 > 0$, $a_2(x) \geqslant a_2 > 0$, $a_0(x) \leqslant 0$.

用分离变量法求解，设 $X(x)T(t)$ 为满足齐次方程和齐次边界条件的非零解，代入方程和边界条件，分离变量得

$$b_2(t)T''(t) - b_1(t)T'(t) - b_0(t)T(t) + \lambda T(t) = 0 \qquad (2)$$

和固有值问题

$$\begin{cases} a_2(x)X'' + a_1(x)X' + a_0(x)X + \lambda X(x) = 0 \\ \alpha_1 X(0) - \beta_1 X'(0) = 0, \ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

根据 S-L 理论，此固有值问题的固有值是 $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty$，对应的固有函数系 $X_k(x)$ 构成 $[0, l]$ 上完备的带有权函数 $\rho(x)$ 的正交系，其中

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{a_1(x) - a'_2(x)}{a_2(x)} \mathrm{d}x}$$

对于每一个 $\lambda = \lambda_k$，代入方程(2)得解

$$T_k(t) = A_k T_{1k}(t) + B_k T_{2k}(t)$$

根据叠加原理，令

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k T_{1k}(t) + B_k T_{2k}(t)) X_k(x)$$

由初始条件得

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k T_{1k}(0) + B_k T_{2k}(0)) X_k(x) \\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k T'_{1k}(0) + B_k T'_{2k}(0)) X_k(x) \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} A_k T_{1k}(0) + B_k T_{2k}(0) = \varphi_k \\ A_k T'_{1k}(0) + B_k T'_{2k}(0) = \psi_k \end{cases}$$

其中

$$\varphi_k = \frac{\int_0^l \rho(x)\varphi(x) X_k(x) \mathrm{d}x}{\| X_k \|^2}$$

$$\psi_k = \frac{\int_0^l \rho(x)\psi(x) X_k(x) \mathrm{d}x}{\| X_k \|^2}$$

$$\| X_k \|^2 = \int_0^l \rho(x) X_k^2(x) \mathrm{d}x$$

从而可以唯一地确定出 A_k 和 B_k，从而得到所设混合问题的解.

例 1 求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - u, \ t > 0, \ 1 < x < e \\ u|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=1} = 0, \ u|_{x=e} = 0 \end{cases}$$

设 $X(x)T(t)$ 满足齐次方程和齐次边界条件，代入方程和齐次边界条件完成分离变量手续得

$$T'' + (\lambda + 1)T = 0$$

和固有值问题

$$\begin{cases} x^2 X'' + xX' + \lambda X = 0, \ 1 < x < e \\ X(1) = 0, \ X(e) = 0 \end{cases}$$

此为 Euler 方程的固有值问题，其固有值为 $\lambda_k = (k\pi)^2$，对应的固有函数是 $\sin(k\pi \ln x)$，$k = 1, 2, \cdots$，它们构成 [1, e] 区间上带有权函数 $\dfrac{1}{x}$ 的完备的正交系，对于每一个 $\lambda = \lambda_k$，解关于 $T(t)$ 的方程得

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{k^2\pi^2 + 1}\,t + B_k \sin\sqrt{k^2\pi^2 + 1}\,t$$

根据叠加原理，令

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\sqrt{k^2\pi^2 + 1}\,t + B_k \sin\sqrt{k^2\pi^2 + 1}\,t \right) \sin(k\pi \ln x)$$

由初始条件得

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi \ln x)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^2\pi^2 + 1}\, B_k \sin(k\pi \ln x)$$

所以

$$B_k=\frac{\int_1^e \frac{1}{x}\psi(x)\sin(k\pi\ln x)\mathrm{d}x}{\int_1^e \frac{1}{x}\sin^2(k\pi\ln x)\mathrm{d}x\sqrt{k^2\pi^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k^2\pi^2+1}}\psi_k$$

$$A_k=0$$

从而得解

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2\pi^2+1}}\psi_k\sin\sqrt{k^2\pi^2+1}t\sin(k\pi\ln x)$$

例 2　求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right),\ t>0,\ 0<r<b\\ u|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(r)\\ u|_{r=b}=0\end{cases}$$

实际上，此问题是在一个半径为 b 的球上求解三维波动方程的混合问题转变而来的，应用球坐标，由于球面对称性所以得到上列两个自变量的定解问题，不进行具体地求解就可以从方程中看出，虽然对自变量 r 来说，一个端点 $r=0$ 是方程的奇点，但用分离变量求解所得固有值问题中，$r=0$ 属于奇性不高的奇点，在 $r=0$ 端加入自然边界条件，S-L 问题的理论仍然成立．实际上用分离变量法可求得问题的解

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{b}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi}{b}t\left(\sin\frac{k\pi}{b}r\right)\frac{1}{r}$$

其中

$$b_k=\frac{2}{b}\int_0^b r\psi(r)\sin\frac{k\pi r}{b}\mathrm{d}r$$

3.3 二阶常微分方程解析理论

到现在为止，我们能解析地求解二阶线性常微分方程的固有值问题不是很多，基本上只是常系数方程的固有值问题，或者是能作适当的变数代换化为常系数方程的问题，例如 Euler 方程的固有值问题. 但是数学物理问题中出现许多变系数二阶线性方程的问题. 其方程的系数是解析函数，通常是多项式，所以本节将集中介绍关于解析系数微分方程的几个基本定理，这几个定理同时给出了求解的方法.

本节要讨论的是复自变量 x 的复变函数 y 的二阶方程

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

在某一个复平面的区域中 $P(x)$，$Q(x)$ 解析，或只有有限个孤立奇点，例如 $P(x)$，$Q(x)$ 是多项式或有理函数，方程的解 $y(x)$ 除一些孤立的奇点外也必然是解析的. 但是在实际应用中最终只关心复变量 x 取实轴上某一区间时的解，而这时 $P(x)$，$Q(x)$ 通常也取实值，所以本教材中仍然把复变量记作 x，但从基本概念和基本理论上总应视作复变函数的微分方程来理解. 另一方面也可理解作把实变量的微分方程解析延拓为复变量的微分方程.

3.3.1 解析理论的几个定理

定理一(Cauchy) 设 $\begin{cases} y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = 0 \\ y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1 \end{cases}$

设 $P(x)$，$Q(x)$ 在 $|x - x_0| < R$ 内解析，这时称 x_0 为方程的正则点，则上述初值问题在 $|x - x_0| < R$ 内有唯一的解析解

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

显然，可以由初始条件和方程唯一地确定得系数

$$a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$$

所以唯一性得证．而进一步可以证明所得的幂级数的收敛半径至少是 R，这样就证明了定理一．本定理给出了用幂级数求解微分方程的埋论基础．在具体操作时，可以把 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 也展成幂级数，代入方程比较同次幂的系数可以得出确定 a_n 的递推方程，由初始数据 a_0，a_1 可以递推地确定 $a_n(n \geqslant 2)$．从而得出幂级数解．

推论 在 $|x-x_0|<R$，方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的基础解系 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 均是解析函数．

定理二(Fuchs) 设

$$y''(x)+\frac{P(x)}{(x-x_0)}y+\frac{Q(x)}{(x-x_0)^2}y=0 \tag{1}$$

$P(x)$ 和 $Q(x)$ 在 $|x-x_0|<R$ 内解，这时称 x_0 为方程的正则奇点，则在 $0<|x-x_0|<R$ 内方程的基础解系 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为

$$y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$y_2(x)=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

或

$$y_2(x)=c_0y_1(x)\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

其中 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$．

$$设\ y(x)=(x-x_0)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ a_0\neq 0 \tag{2}$$

$$P(x)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i(x-x_0)^i,\ Q(x)=\sum_{i=0}^{\infty}q_i(x-x_0)^i$$

把之代入方程比较系数可得

$$\begin{cases} f_0(\rho)a_0=0 \\ f_0(\rho+1)a_1+a_0f_1(\rho)=0 \\ \vdots \\ f_0(\rho+n)a_n+a_{n-1}f_1(\rho+n-1)+\cdots+a_0f_n(\rho)=0,\ n\geqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\begin{cases} f_0(\rho) = \rho(\rho - 1) + \rho p_0 + q_0 \\ f_k(\rho) = \rho p_k + q_k \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4}$$

由于 $a_0 \neq 0$，必有

$$f_0(\rho) = 0$$

称 $f_0(\rho) = 0$ 为所设微分方程(1)关于正则奇点 x_0 的指标方程，由它可以确定两个根 ρ_1，ρ_2，称 ρ_1，ρ_2 为正则奇点 x_0 的指标数.

设 $\mathrm{Re}\rho_1 \geqslant \mathrm{Re}\rho_2$. 在所设方程的解 (2) 式中，首先取 $\rho = \rho_1$，由于 $f_0(\rho_1) = 0$，$f_0(\rho_1 + n) \neq 0$，$n = 1, 2, \cdots$，所以对于任意选定的 $a_0 \neq 0$，则可以从递推关系式(3)中唯一地确定出 $a_n(n \geqslant 1)$，从而得方程的一个解

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

可以证明，所得的幂级数在 $|x - x_0| < R$ 必收敛. 称上述的展开式为广义幂级数展开式.

如果 $\rho_1 - \rho_2$ 不是整数或零，则在所设方程的解(2)式中，取 $\rho = \rho_2$，这时 $f_0(\rho_2) = 0$，$f_0(\rho_2 + n) \neq 0$，所以对于任意选定的 $a_0 \neq 0$，又可以得到方程的另一个解

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

或者为区别计，把 a_n 改记为 b_n，而得

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

不难证明，这时 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关，它们构成微分方程(1)在 $0 < |x - x_0| < R$ 中的基解系.

如果 $\rho_1 - \rho_2 = k$，则由于 $f(\rho_2) = 0$，$f(\rho_2 + k) = 0$，所以递推关系式到了第 k 步，则不能进行，这时可以令 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$，$a_k \neq 0$，则任意取定 $a_k \neq 0$，又可由递推公式(3)唯一地确定 $a_n(n > k)$，从而得到方程的一个解

$$y_2(x) = (x - x_0)^{e_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x - x_0)^n$$

如果此解和 $y_1(x)$ 线性无关，则 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 构成方程(1)的基解系，但这时有可能 $y_2(x)$ 和 $y_1(x)$ 线性相关，则要通过另外的途径来求基解组的另一个解 $y_2(x)$，例如另一个解可用 Liouville 公式或参数变量法得出，这时此解可以表为

$$y_2(x) = c_0y_1(x)\ln(x - x_0) + (x - x_0)^{e_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x - x_0)^n$$

定理三 设

$$y''_{(x)} + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

其中 $P(x)$，$Q(x)$ 在 $0 < |x - x_0| < R$ 内解析，但是 x_0 是 $P(x)$ 阶数高于一阶的极点，或者 x_0 是 $Q(x)$ 阶数高于 2 阶的极点，这时称 x_0 为方程的非正则奇点，则在 $0 < |x - x_0| < R$ 内方程的基解组 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为

$$y_1(x) = (x - x_0)^{e_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{e_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(x - x_0)^n$$

或

$$y_2(x) = c_0y_1(x)\ln(x - x_0) + (x - x_0)^{e_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(x - x_0)^n$$

而且可以证明，这时上述的洛朗级数中一定有无穷多项负幂项. 其具体确定这种广义洛朗级数解的过程不再陈述.

例如，$y'' + \frac{1}{x^2}y' + y = 0$ 在任意去心的圆 $0 < |x| < R$ 内只能是广义洛朗级数的解而不能是广义幂级数的解. 设

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5}$$

又设在 $|x| > R$ 内 $P(x)$，$Q(x)$ 解析，即 ∞ 点为 $P(x)$，$Q(x)$ 的一个孤立奇点，作变数代换 $x = \frac{1}{t}$，则方程(5)变为

$$y''(t) + P_1(t)y'(t) + Q_1(t)y(t) = 0 \tag{6}$$

其中

$$P_1(t)=\frac{2t-P\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2},\ Q_1(t)=\frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4}$$

若 $t=0$ 是方程(6)的正则点或正则奇点或非正则奇点，则相应地称 ∞ 远点是方程(5)的正则点或正则奇点或非正则奇点，对于正则奇点的情况也相应地定义 ∞ 远点的指标数.

如果在复平面上(包括 ∞ 远点)方程只有有限个正则奇点而无其它奇点时，则称方程是 Fuchs 型，三正则奇点的 Fuchs 型方程又称做 Riemann 方程，它是较为重要的一类.

* 3.3.2 超几何方程和合流超几何方程

称

$$x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0 \tag{7}$$

为超几何方程，此方程是三正则奇点 Fuchs 型方程的典型代表，此方程有三个正则奇点 0，1，∞，相应的指标是 $(0, 1-\gamma)$，$(0, \gamma-\alpha-\beta)$，(α, β). 称它的解为超几何函数，按照 Riemann 的记号，把它的解一般地记为

$$y(x)=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\}$$

其中第一行表示三正则奇点，第二行和第三行表示对应的指标数. 如果选取正则奇点 0 为解的展开点，设 γ 不为零或负整数时，根据 Fuchs 定理可令方程的一个解为

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ a_0\neq 0,\ |x|<1$$

级数的收敛半径至少是 1，先取 $a_0=1$ 时，则根据一般的递推公式(3)，即把级数代入方程合并同次幂的系数使其为零，则可得方程(7)的一个解

$$y_1(x)=1$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

称此级数为超几何级数，记为 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$．如果把它解析延拓到整个复平面，则除奇点 1 外它均满足超几何方程(7)．

类似地，如果取正则奇点 $x=0$ 的另一个指标数 $1-\gamma$ 求广义幂级数解，则可得超几何方程的另一个解

$$y_2(x)=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

如果 α 或 β 中有一个是负整数 $-n(n=0, 1, \cdots)$，则 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 变为一个 n 次多项式，除此外它一定有无穷项．当 $\beta=\gamma$ 时 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)=(1-x)^{-\alpha}$，当 α, β, γ 取某些特殊的值时可得到许多初等函数，例如 $F(1, 1, 1, x)=\frac{1}{1-x}$ 成了几何级数，$F(1, 1, 2, x)=\frac{-1}{x}\ln(1-x)$．

在许多实际应用中，α, β, γ 为实数，所以当 x 取实值 $-1<x<1$ 时，$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 也取实值．常常需讨论在两个端点 $x=\pm 1$ 时，$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 的收敛性，当 α 或 β 取负整数或 0 时，$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 是多项式，当然对任何的 x 均收敛．设 α, β, γ 均不是负整数和零的情况时，可以证明

$\gamma-\alpha-\beta>0$，$x=\pm 1$ 时，$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 收敛

$\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$，$x=1$ 时，$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 发散

$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$，$x=-1$ 时，$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 收敛

$\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$，$x=-1$ 时，$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 发散

有关超几何方程的其它的各种解在许多教材中均有详细的讨论，不多论述，其它的解也均可以通过超几何级数表示出来．

例 1　l 阶 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \tag{8}$$

它也是具有三正则奇点的 Fuchs 型方程，三正则奇点为 1，-1 和 ∞ 远点，它们相应的指标数是 $(0, 0)$，$(0, 0)$ 和 $(-l, l+1)$．根据 Riemann 的记号，方程(8)的解可一般地记为

$$y(x) = P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ 0 & 0 & -l & x \\ 0 & 0 & l+1 & \end{Bmatrix}$$

若作变数代换

$$t = \frac{1-x}{2}$$

则方程(8)变为超几何方程

$$t(1-t)y''(t) + (1-2t)y'(t) + t(t+1)y = 0$$

此方程相当于参数 $\alpha = -(l)$，$\beta = (l+1)$，$\gamma = 1$ 时的超几何方程，所以

$$y(t) = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -l & t \\ 0 & 0 & l+1 & \end{Bmatrix}$$

$$y(x) = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -l & \dfrac{1-x}{2} \\ 0 & 0 & l+1 & \end{Bmatrix}$$

所以上述的自变量的代换并不会使奇点的指标数发生改变而只是改变了奇点的位置. 所以方程(8)有一个特解

$$y_1(x) = F(-l, l+1, 1, \frac{1-x}{2})$$

它相当于在正则奇点 $x = 1$ 处展开且 $y_1(1) = 1$ 的幂级数解. 要此解为一个多项式必须取 $l = n(n = 0, 1, \cdots)$，这时

$$y_1(x) = F(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2})$$

为一个 n 次多项式，可以证明它和 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

只相差一个常数因子 C_n.

根据例 1 中关于 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 在端 $x=\pm 1$ 敛散性的讨论，若 l 不取非负整数，则当 $x=-1$ 时，$F(-l, l+1, 1, \frac{1-x}{2})$ 必然发散. 结合 S-L 问题的理论可得下列结论：Legendre 方程固有值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0, & -1<x<1 \\ |y(\pm 1)|<\infty \end{cases}$$

有固有值 $\lambda=\lambda_n=n(n+1)$，$n=0, 1, 2, \cdots$ 对应的固有函数是

$$F(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2})$$

它是一个 n 次多项式，它们构成 $[-1, 1]$ 上完备的正交系.

例 9 l 阶伴随 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \qquad (9)$$

其中 m 是非负整数，$m=0$ 时就是 Legende 方程，它也是具三正则奇点 1，-1，∞ 的 Fuchs 型方程，对应的指标数是 $\left(\frac{m}{2}, \frac{-m}{2}\right)$，$\left(\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ 和 $(-l, l+1)$，在理论和应用中又常采用变数代换使它变为超几何方程，从而可用超几何方程的解表示方程(9)的解.

令
$$y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$$

则得

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+(l(l+1)-m(m+1))u(x)=0$$

此方程仍然是具有同样的正则奇点 1，-1，∞ 的 Fuchs 型方程，但 1 和 -1 的指标数减少了 $\frac{m}{2}$，∞ 远点的指标数增加了 m，即这时对应的指标数为

$$(0, -m), (0, -m) \quad 和 \quad (-l+m, l+1+m)$$

再作变数代换

$$t=\frac{1-x}{2}$$

则正则奇点变为 0，1，∞ 而相应的指标数保持为 $(0, -m)$，$(0, -m)$ 和 $(-l+m, l+1+m)$，这已成为超几何方程. 其参数 $\alpha = -l+m$，$\beta = l+1+m$，$\gamma = 1+m$，$\gamma - \alpha - \beta = -m \leqslant 0$，所以，当 $-l+m$ 不是负整数或零时，

$$F\left(-l+m, l+m+1, 1+m, \frac{1-x}{2}\right)$$

在 $x=-1$ 处必然发散. 当 $-l+m$ 是负整数时上式是 x 的 $l-m$ 次多项式. 综上所述得方程(9)的一个解

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} F\left(-l+m, l+m+1, 1+m, \frac{1-x}{2}\right)$$

而要使上述解之级数因子在 $x=-1$ 也收敛，必须 $l=n(n=m, m+1, \cdots)$，这时 $F\left(-n+m, n+m+1, 1+m, \frac{1-x}{2}\right)$ 是一个 $n-m$ 次多项式. 结合 S-L 理论，可得伴随 Legendre 方程固有值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0, & -1<x<1 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

有固有值 $\lambda_n = n(n+1)$ $(n=m, m+1, \cdots)$，它对应的固有函数是

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}} F\left(-n+m, n+m+1, 1+m, \frac{1-x}{2}\right)$$

其中的 F 是一个 $n-m$ 次多项式.

以上例子是以超几何方程为代表的三正则奇点的方程. 在数理方程中还有一类重要方程是以合流超几何方程为代表的二阶方程.

称

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \tag{10}$$

为二阶合流超几何方程，若设 $\delta = x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，则(10)可以写为

$$[\delta(\delta+\gamma-1) - x(\delta+\alpha)]y = 0$$

而超几何方程(7)可以写为

$$[\delta(\delta+\gamma-1)-x(\delta+\alpha)(\delta+\beta)]y=0$$

方程(10)有一个正则奇点 0 和一个非正则奇点 ∞ 远点，正则奇点 0 的指标数是 $(0, 1-\gamma)$. 根据 Fuchs 定理可求它的一个幂级数解，它的收敛半径为 ∞. 现在我们是要把它和超几何方程联系起来，从而可以用超几何函数来表示它的解.

在超几何方程(7)中，令 $t=\frac{x}{\beta}$，则方程的奇点变为 $0, \beta, \infty$ 而对应的指标数不变，应用 Riemann 的记号，解可表为

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{x}{\beta} \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}$$

$$=P\begin{Bmatrix} 0 & \beta & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}$$

它们满足

$$y''+\left[\frac{\gamma}{x}+\frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{x-\beta}\right]y'+\frac{\alpha\beta}{x(x-\beta)}y=0$$

如果再令 $\beta\to\infty$，则两个正则奇点 β 和 ∞ 合流，上述方程退化为合流超几何方程(10).

$$y''+\left(\frac{\gamma}{x}-1\right)y'-\frac{\alpha}{x}y=0$$

这时 ∞ 远点变为合流超几何方程的非正则奇点，而且也可以证明

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{\beta}\right)=F(\alpha, \gamma, x)$$

也正是合流超几何方程的一个解，称之为合流超几何级数，不难验证

$$F(\alpha, \gamma, x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

而且这时 $F(\alpha, \gamma, x)$ 的收敛半径也是 ∞，实际上当 γ 不是负整数和零时，它正是合流超几何方程(10)在正则奇点 0 展开的幂级数解. 类似地可得它的另一个解为 $x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, x)$.

例 3　γ 阶 Bessell 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \gamma^2)y = 0 \tag{11}$$

$x = 0$ 是它的正则奇点，指标数为 $(-\gamma, \gamma)$，∞ 是它的非正则奇点. 经过适当的变量代换也可以把 Bessell 方程转化为合流超几何方程，下节中将根据 Fuchs 定理来直接讨论它的解而得到各类 Bessell 函数，从而把合流超几何方程转化为 Bessell 方程.

3.4　某些二阶常微分方程的解所定义的特殊函数

本节将依据微分方程的解析理论和固有值问题的理论来讨论某些重要的二阶线性常微分方程，用它们的解定义某些特殊函数，求解这些方程的固有值问题，为应用分离变量法求解更多偏微分方程定解问题作准备.

3.4.1　Bessell 方程和 Bessell 函数

(i)　Bessell 函数. 称

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2-\gamma^2}{x^2}y = 0$$

或

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \gamma^2)y = 0 \tag{1}$$

为 γ 阶 Bessell 方程. 在实际应用中通常 $\gamma \geqslant 0$，而一般讨论时 γ 可以是任意的复数. 为简计，设 $\gamma \geqslant 0$，显然 $x = 0$ 是方程的一个正则奇点，而且除了 ∞ 远点外无其它的奇点，根据 Fuchs 定理可令

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0$$

代入方程比较系数可得

$$
\begin{cases}
(\rho^2 - \gamma^2)a_0 = 0 \\
((1+\rho)^2 - \gamma^2)a_1 = 0 \\
((2+\rho)^2 - \gamma^2)a_2 + a_0 = 0 \\
\vdots \\
((n+\rho)^2 - \gamma^2)a_n + a_{n-2} = 0,\ n = 2,\ 3,\ \cdots
\end{cases}
\tag{2}
$$

由指标方程 $\rho^2 - \gamma^2 = 0$，可以得到 $x = 0$ 点的两个指标数 $(\gamma, -\gamma)$，即指标方程的两个根 $\rho_1 = \gamma$, $\rho_2 = -\gamma$.

首先取 $\rho = \rho_1 = \gamma$，则可以由递推公式(2)确定得

$$
\begin{aligned}
a_{2k-1} &= 0 \\
a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}k!(k+\gamma)(k+\gamma-1)\cdots(\gamma+1)} \\
&= (-1)^k \frac{a_0 \Gamma(1+\gamma)}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\gamma+1)} \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots
\end{aligned}
$$

如果选 $a_0 = \dfrac{1}{2^\gamma} \dfrac{1}{\Gamma(1+\gamma)}$，则得方程(1)的一个解

$$
y_1(x) = J_\gamma(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k+\gamma+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}
$$

称此函数为 γ 阶 Bessell 函数，$J_\gamma(x)$ 中幂级数部分的收敛半径为 ∞.

如果 $\rho_1 - \rho_2 = 2\gamma$ 不是整数，则选 $\rho = \rho_2 = -\gamma$ 类似地可以得方程(1)的另一个解

$$
y_2(x) = J_{-\gamma}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k-\gamma+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k}
$$

称之为 $-\gamma$ 阶 Bessell 函数，显然这时 $y_1(x)$ 在原点邻近有界，$y_2(x)$ 在原点邻近无界，所以 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关，$J_\gamma(x)$，$J_{-\gamma}(x)$ 构成方程(1)的基解组.

如果 $\rho_1 - \rho_2 = 2\gamma = 2m + 1$ 为一个正奇数时，即 γ 为半整数 $m + \dfrac{1}{2}$ 时，可以仍设

$$y_2(x) = x^{-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0)$$

并设 $a_{2k-1} = 0$，$(k = 1, 2, \cdots)$，$a_0 = \dfrac{1}{2^{-\gamma}} \dfrac{1}{\Gamma(1-\gamma)}$，则得

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_{-\gamma}(x) = J_{-\left(m+\frac{l}{2}\right)}(x) \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k-\gamma+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{aligned}$$

这时 $J_{\gamma}(x)$ 和 $J_{-\gamma}(x)$ 也构成方程(1)的基础解系，称之为半整阶的 Bessell 函数，可以证明半整阶 Bessell 函数是初等函数，例如不难验证

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

如果 $\rho_2 - \rho_1 = 2\gamma = 2n$ $(n = 0, 1, \cdots)$，即 γ 为整数时，为了按递推公式(2)确定方程(1)的另一个解，若设 $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2(n-1)} = 0$，$a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n \Gamma(n+1)}$，则得

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{aligned}$$

后一个等式是由于当 $k \leqslant n-1$ 时 $k-n+1$ 为负整数是 $\Gamma(x)$ 的极点，所以认为 $\dfrac{1}{\Gamma(k-n+1)} = 0$，也记上述 $y_2(x)$ 为 $J_{-n}(x)$，即 $-n$ 阶 Bessell 函数，但由于 n 为整数

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n} \frac{1}{(n+j)!\Gamma(1+j)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+j)} \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!\Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

$$= (-1)^n J_n(x)$$

也就是说所得的第二个解 $J_{-n}(x)$ 和第一个解 $J_n(x)$ 线性相关，必须另外设法找方程的和 $J_n(x)$ 线性无关的第二个解 $y_2(x)$，通常这时可采用 Liouvill 公式或参数变易法来求出 $y_2(x)$.

当 γ 不是整数时，显然

$$N_\gamma(x) = \frac{J_\gamma(x)\cos\gamma\pi - J_{-\gamma}(x)}{\sin\gamma\pi}$$

也是 γ 阶 Bessell 方程的解，称之为 γ 阶第二类 Bessell 函数，又称为 γ 阶 Neumann 函数，且 $J_\gamma(x)$ 和 $N_\gamma(x)$ 构成方程(1)的基解组. 在 $x=0$ 邻近 $N_\gamma(x)$ 是无界函数，但当 γ 为整数 n 时，上述函数变成了一个未定式，可以证明当 γ 趋于 n 时上述未定式的极限存在，且仍记之为 $N_n(x)$，即

$$N_n(x) = \lim_{\gamma\to n} N_\gamma(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_n(x)}{\partial n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-n}(x)}{\partial n}\right)$$

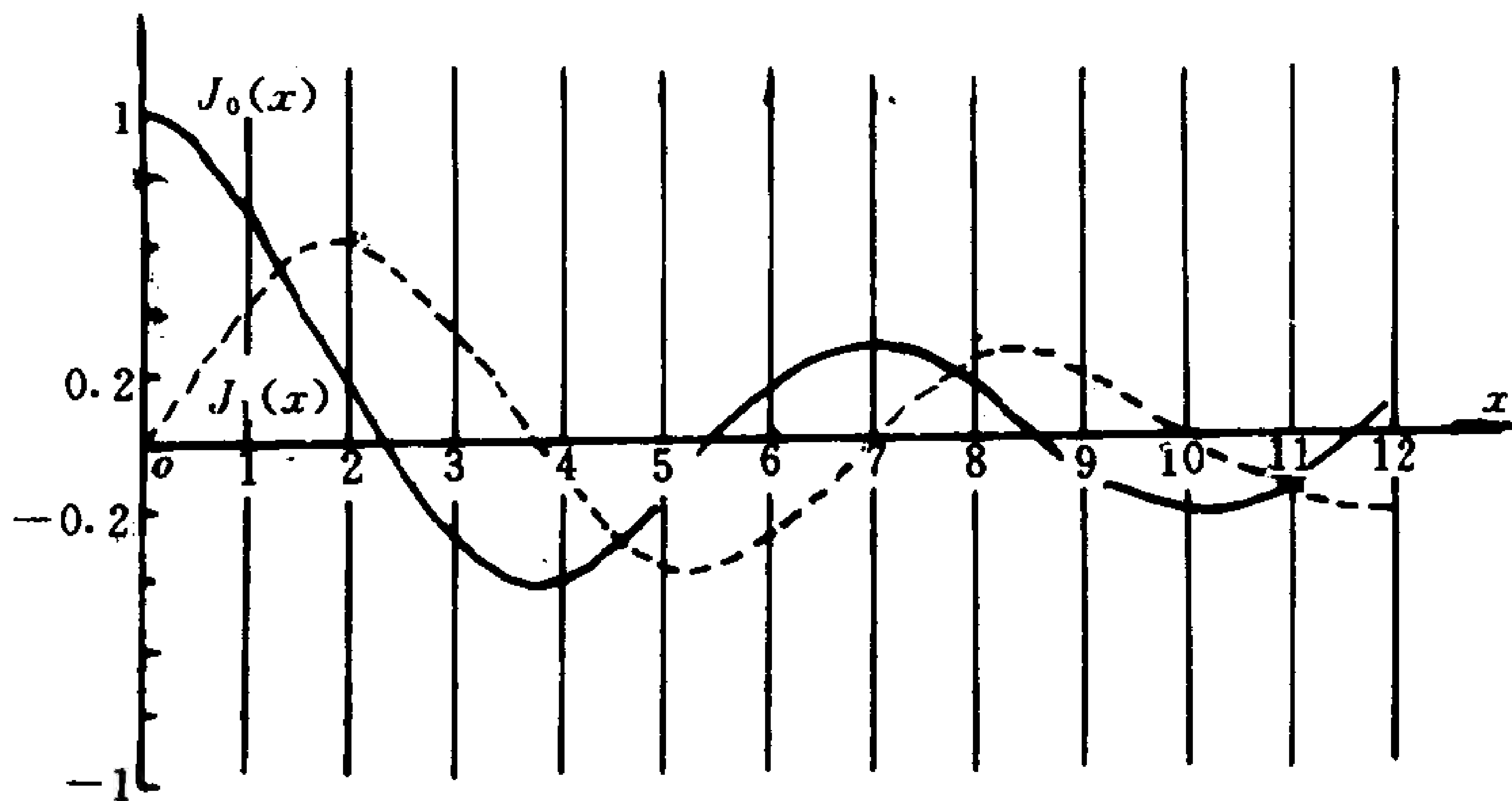


图 3.2

且还可以证明 $N_n(x)$ 和 $J_n(x)$ 构成 n 阶 Bessell 方程的基解组，$N_n(x)$ 在 $x=0$ 邻近无界，也称它为 n 阶第二类 Bessell 函数. 所以在一般情况下 $J_\gamma(x)$，$N_\gamma(x)$ 构成了 γ 阶 Bessell 方程的基解

组.

$J_\gamma(x)$，$N_\gamma(x)$ 的许多性质有专门的著作加以讨论，也有专门的函数表，在实际应用时可以查阅. 例如，当 x 取在区间 $(0, +\infty)$ 时，它们具有衰减振荡的特性，其振荡性和正弦函数和余弦函数有一定的相似，图 3.2 和图 3.3 给出了 $J_0(x)$，$N_0(x)$ 和 $J_1(x)$，$N_1(x)$ 的图形.

有时为了某种方便，还可引入第三类 Bessell 函数，又称为 γ 阶 Hankel 函数，其定义为

$$H_\gamma^{(1)}(x) = J_\gamma(x) + iN_\gamma(x)$$
$$H_\gamma^{(2)}(x) = J_\gamma(x) - iN_\gamma(x)$$

它们也构成 γ 阶 Bessell 方程的基解组.

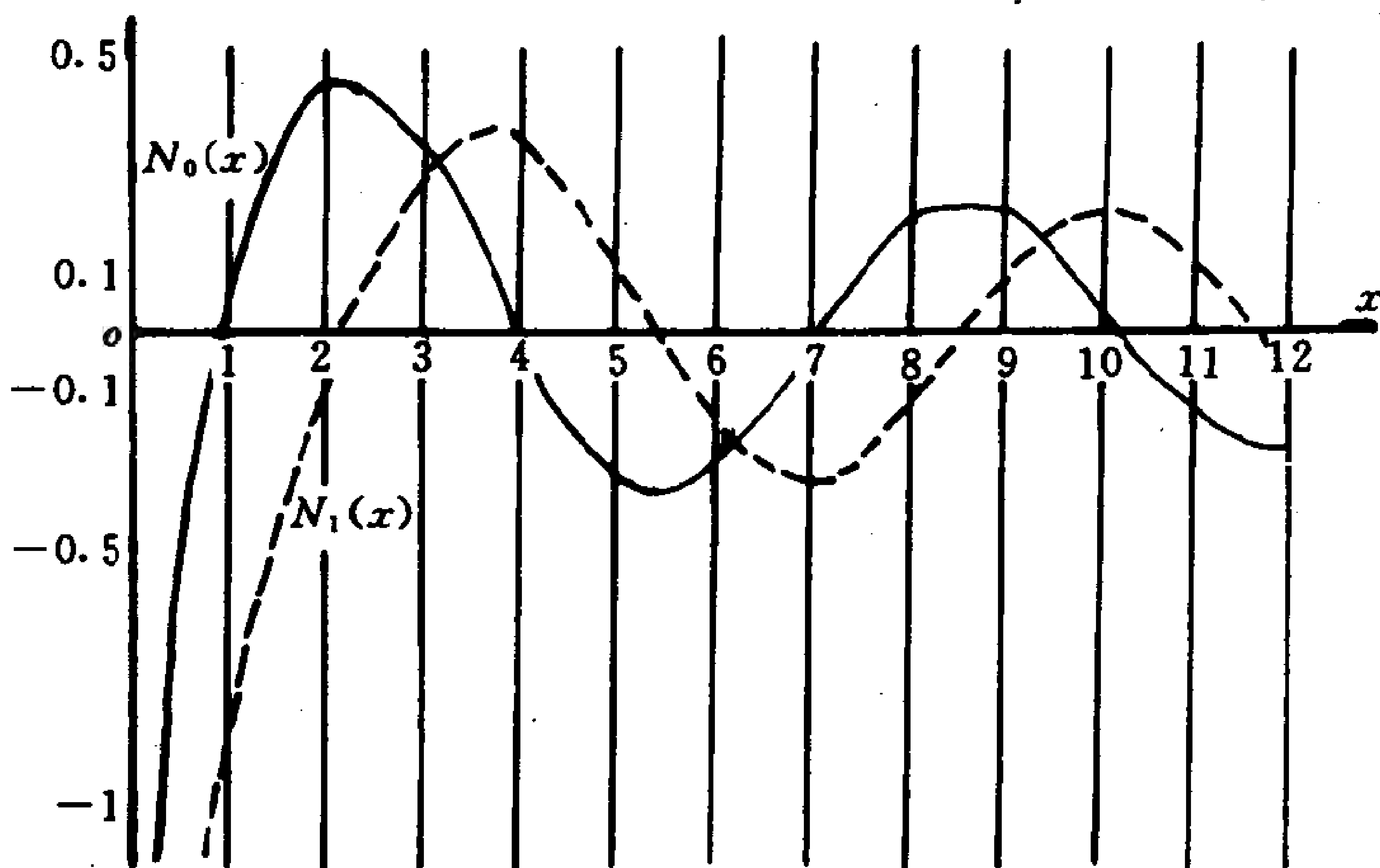


图 3.3

(ii) 虚变量 Bessell 函数. 称

$$x^2y'' + xy' + (-x^2 - \gamma^2)y = 0 \tag{3}$$

为 γ 阶虚变量 Bessell 方程，为简单计，设 $\gamma \geqslant 0$.

作变数代换 $t = ix$，则方程变为 γ 阶 Bessell 方程

$$t^2y'' + ty'(t) + (t^2 - \gamma^2)y(t) = 0$$

所以立即可得 γ 阶虚变量 Bessell 方程的解

$$J_\gamma(ix),\ J_{-\gamma}(ix),\ N_\gamma(ix),\ H_\gamma^{(1)}(ix),\ H_\gamma^{(2)}(ix)$$

但由于

$$J_\gamma(ix)=i^\gamma\left(\frac{x}{2}\right)^\gamma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\gamma+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$J_{-\gamma}(ix)=i^{-\gamma}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k-\gamma+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

所以取

$$I_\gamma(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\gamma\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\gamma+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$I_{-\gamma}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k-\gamma+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

分别称它们为 γ 阶和 $-\gamma$ 阶虚变量 Bessell 函数，当 x 取实数时它们仍取实值，它们是 γ 阶虚变量 Bessell 方程的解.

当 γ 不是整数时，$I_\gamma(x)$，$I_{-\gamma}(x)$ 为方程(3)的基解组，在原点邻近 $I_\gamma(x)$ 有界，$I_{-\gamma}(x)$ 无界.

当 $\gamma=n$ 为整数时，$I_{-n}(x)=I_n(x)$，用下述参数变易法求基解组的另一个解，当 γ 不为整数时，设

$$K_\gamma(x)=\frac{\pi(I_{-\gamma}(x)-I_\gamma(x))}{2\sin\gamma\pi}$$

它和 $I_\gamma(x)$ 构成方程(3)的基解组，称之为 γ 阶第二类虚变量 Bessell 函数. 在 $x=0$ 邻近，它也是无界的，当 γ 趋于整数 n 时，上式变成了未定式，可证它的极限仍存在，仍记为 $K_n(x)$，即

$$K_n(x)=\lim_{\gamma\to n}K_\gamma(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{\partial I_{-\gamma}(x)}{\partial\gamma}-\frac{\partial I_\gamma(x)}{\partial\gamma}\right)\Bigg|_{\gamma=n}$$

且也可证明它也是 n 阶虚变量 Bessell 方程的解，在 $x=0$ 邻近无界，$I_n(x)$，$K_n(x)$ 构成了方程(3)的基解组，当 x 取实数 $(0,\infty)$ 时，$I_\gamma(x)$，$I_{-\gamma}(x)$，$K_\gamma(x)$ 没有振荡性，没有零点，这和双曲正弦和双曲余弦函数相似，例如

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sh}x,\ I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{ch}x$$

图 3.4 和图 3.5 表示 $I_0(x)$，$I_1(x)$ 和 $K_0(x)$，$K_1(x)$ 的图形.

(iii) 可化为 Bessell 方程的某类方程.

有的方程经过一定简单的变量代换可化为 Bessell 方程或虚变量 Bessell 方程.

例 1 $x^2y'' + xy' + (\pm w^2x^2 - \gamma^2)y = 0$

作变换 $wx = t$，则得

$$t^2y'' + ty'(t) + (\pm t^2 - \gamma^2)y = 0$$

所以可立即写出原方程的通解

$$y(x) = c_1J_\gamma(wx) + c_2N_\gamma(wx)$$

或

$$y(x) = c_1I_\gamma(wx) + c_2K_\gamma(wx)$$

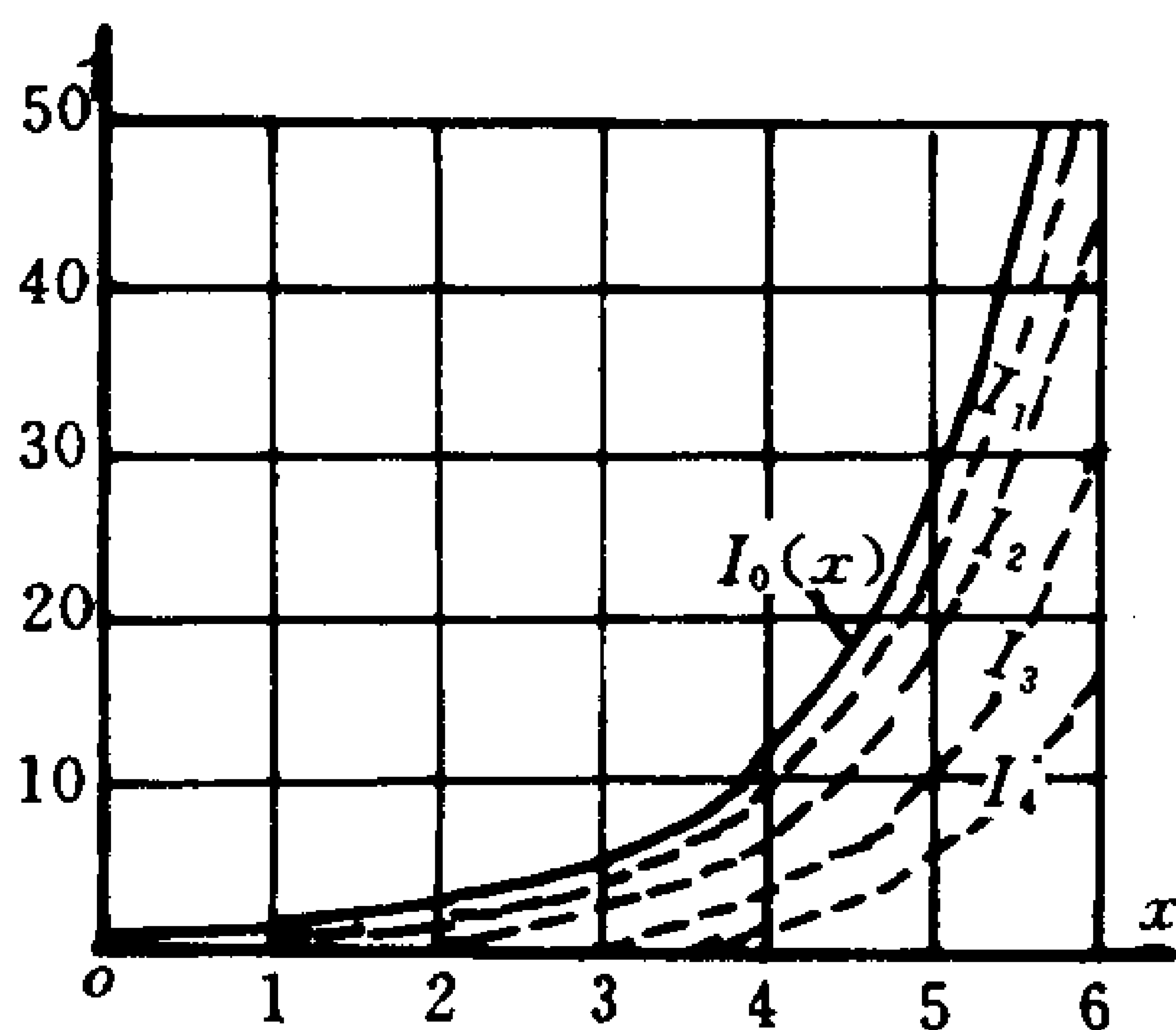


图 3.4

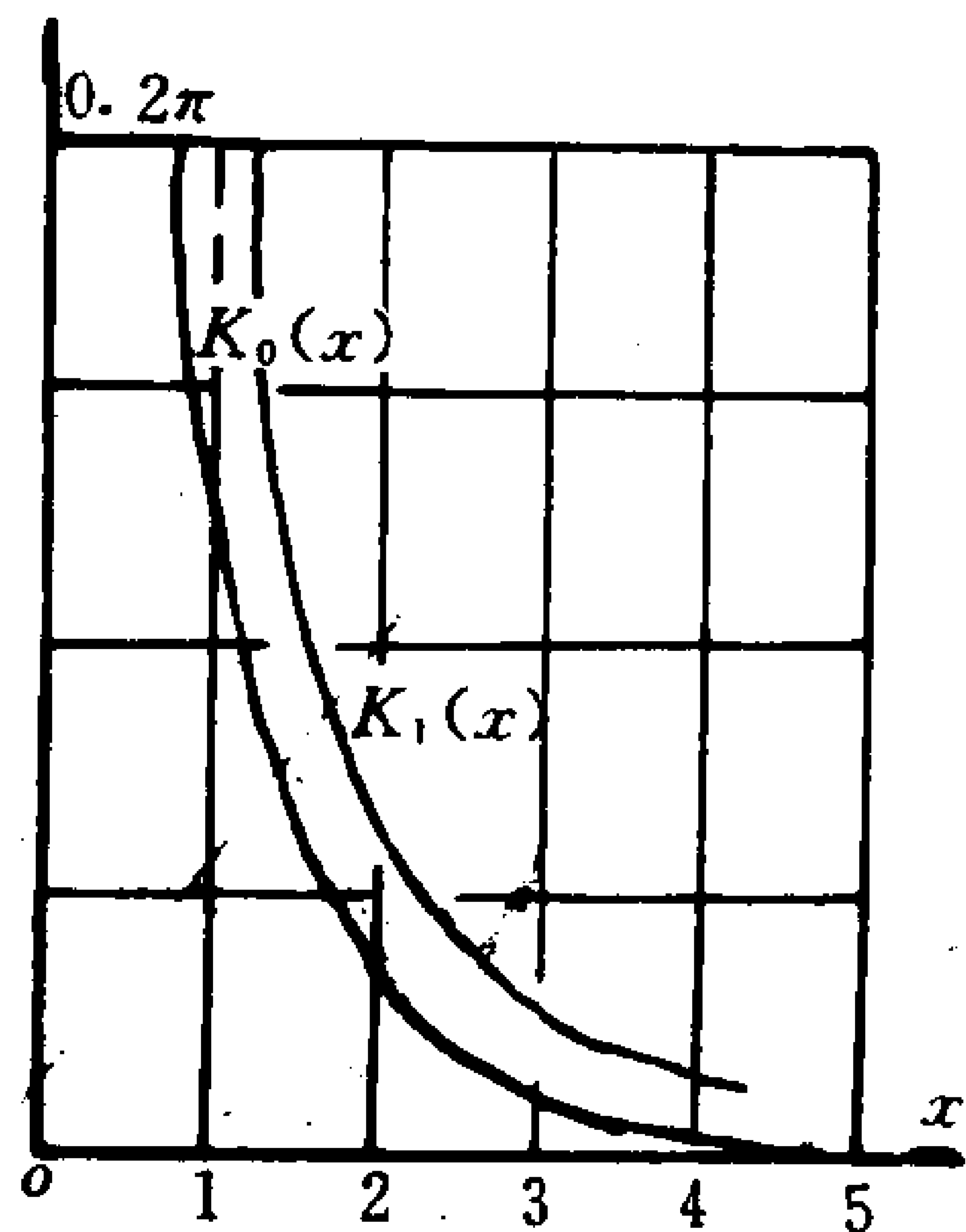


图 3.5

例 2 $x^2y'' + axy' + (bx^s - \gamma^2)y = 0$

当 $a = 1$，$s = 2$ 时就是例 1 的情况. 当 $a = 1$，$s \neq 0$，2 时可作代换 $t = x^{\frac{s}{2}}$，则得

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + \left(b(\frac{2}{s})^2 t^2 - (\frac{2}{s})^2 \gamma^2\right) y = 0$$

这又是例 1 的情况. 当 $a \neq 1$ 时，则可先作代换 $y(x) = x^{\frac{1-a}{2}} u(x)$，则得

$$x^2 u''(x) + x u'(t) + \left(b x^s - (\frac{1-a}{2})^2 - \gamma^2\right) u = 0$$

然后再作自变量的代换 $t = x^{\frac{s}{2}}$，则得

$$t^2 u''(t) + t u'(t) + \left(b(\frac{2}{s})^2 t^2 - (\frac{2}{s})^2 \left((\frac{1-a}{2})^2 + \gamma^2\right)\right) u = 0$$

这又是例 1 时的情况.

例 3　l 阶球 Bessell 方程

$$x^2 y'' + 2x y' + (x^2 - l(l+1)) y = 0$$

作代换

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} u(x)$$

则得

$$x^2 u'' + x u' + \left(x^2 - (\frac{1}{2} + l)^2\right) u = 0$$

所以原方程有两个线性无关的解

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad n_l = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

称 $j_l(x)$ 和 $n_l(x)$ 为 l 阶球 Bessell 函数，如果 l 取整数时，它们均为初等函数. 例如

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

(iv)　Bessell 方程的固有值问题.

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + (\lambda x^2 - \gamma^2) y = 0, \ 0 < x < a \\ |y(0)| < \infty, \ (\alpha y + \beta y')|_{x=a} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

为 γ 阶 Bessell 方程的固有值问题，其中 α, β 为两非负常数且不全为零. 或者可化为自共轭的 $S-L$ 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\dfrac{\gamma^2}{x}+\lambda xy=0 \\ |y(0)|<\infty,\ \alpha y(a)+\beta y'(a)=0 \end{cases}$$

当 $\gamma>0$ 或者当 $\gamma=0$ 而端点 $x=a$ 为第一边界或第三边界条件时，根据 S-L 理论，可令 $\lambda=w^2(w>0)$，这时方程在 $x=0$ 邻近保持有界的非零解是 $cJ_\gamma(wx)$，$c\neq0$. 根据 $x=a$ 端点的边界条件得

$$\alpha J_\gamma(wa)+\omega\beta J'_\gamma(wa)=0$$

此为关于 w 的方程，它的全部正实根是一个无穷的序列

$$0<w_1<w_2<\cdots<w_k<\cdots,\ w_k\to+\infty$$

所以得问题(4)的固有值为 $\lambda_k=w_k^2$，对应的固有函数为 $J_\gamma(w_kx)$，此固有函数系构成 $[0,a]$ 上完备的带权函数 x 的正交系，对于第一边值问题时，即 $y(a)=0$，$J_\gamma(w_ka)=0$ 时得

$$\|J_\gamma(w_kx)\|^2=\int_0^a xJ_\gamma^2(w_kx)\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}J_\gamma^{2\prime}(w_ka)$$

对于第二边界条件时，即 $y'(x)=0$，$J'_\gamma(w_ka)=0$，可得

$$\|J_\gamma(w_kx)\|^2=\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{\gamma^2}{w_k^2}\right)J_\gamma^2(w_ka)$$

对于第三边界条件时，即 $hy(a)+y'(a)=0$，$hJ_\gamma(w_ka)+w_kJ'_\gamma(w_ka)=0$，可得

$$\|J_\gamma(w_kx)\|^2=\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{\gamma^2}{w_k^2}+\frac{a^2h^2}{w_k^2}\right)J_\gamma^2(w_ka)$$

当 $\gamma=0$，而端点 $x=a$ 为第二边界条件时，则显然还应有零特征值 $\lambda_0=0$，对应的固有函数为 1，这时固有函数系

$$\{1,\ J_0(w_kx)\,|\,k=1,2,\cdots\},\quad J'_0(w_ka)=0,\ w_k>0$$

构成 $[0,a]$ 上完备的带权 x 的正交系.

其它某些方程的固有值问题也可以化为 Bessell 方程的固有值问题，最简单的是 l 阶球 Bessell 方程的固有值问题

$$\begin{cases} x^2y' + 2xy' + (\lambda x^2 - l(l+1))y = 0 \\ |y(0)| < \infty,\ y(a) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $l \geqslant 0$，令 $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}u$ 则可化为 $(l + \dfrac{1}{2})$ 阶 Bessell 方程的固有值问题，可知它的固有值 $\lambda_k = w_k^2$，其中 w_k 是 $J_{l+\frac{1}{2}}(w_k a) = 0$ 的第 k 个正根，对应的固有函数是球 Bessell 函数

$$j_l(w_k x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}J_{l+\frac{1}{2}}(w_k x) \quad k = 1, 2, \cdots$$

此函数系构成 $[0, a]$ 上完备的带权函数 x^2 的正交系．如果 $l = 0$，则

$$w_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right),\ j_0(w_k x) = \frac{1}{x}\sin\frac{k\pi}{a}x$$

3.4.2 Legendre 方程和 Legendre 函数

(i) Legender 函数．称

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \tag{5}$$

为 l 阶 Legendre 方程．显然 $x = \pm 1$ 为方程(1)的两个正则奇点，∞ 远点也是方程的一个正则奇点，在常微分方程的解析理论的节目中已讨论过此方程．在实际应用中 $l \geqslant 0$，要在 $(-1, 1)$ 内求解方程，所以为简单计，总设 $l \geqslant 0$．根据 Cauchy 定理，在正则点 $x = 0$ 展开来求方程在 $|x| < 1$ 内的解，即令

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

其中 a_0 和 a_1 可以任意取定，相当于取定初值 $y(0) = a_0$ 和 $y'(0) = a_1$．则可唯一地确定 $a_k (k \geqslant 2)$，代入方程比较同次幂的系数可得递推公式

$$k(k-1)a_k + (l(l+1) - (k-2)(k-1))a_{k-2} = 0,\ k \geqslant 2$$

从此递推公式可知，奇次幂的系数由 a_1 唯一确定，偶次幂的系数由 a_0 唯一确定．

若取 $a_0 = 1$，$a_1 = 0$，则可唯一得到方程(1)的一个解.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

若取 $a_0 = 0$，$a_1 = 1$，又唯一地得方程的另一个解

$$y_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} x^{2k-1}$$

显然 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 构成方程(1)的基解组，上述两个级数在 $|x| < 1$ 内收敛，常常需进一步讨论上述两个解在端点 $x = 1$ 和 $x = -1$ 附近的有界性. 根据系数的递推公式不难看出. 当 l 为一整数 n 时，如果 l 为偶数，则 $y_1(x)$ 是一 n 次多项式，$y_2(x)$ 仍是一个具有无穷项的级数；如果 n 为奇数，则 $y_2(x)$ 是一个 n 次多项式，$y_1(x)$ 仍然是具有无穷多项的级数. 而 l 不是整数时，则 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 均为具有无穷项的无穷级数，用较精细的判别法可知，除了当 l 为整数时的多项式解外，其它任何上述具无穷项的级数解在 $x = 1$ 和 $x = -1$ 邻近都是无界的，在这两个端点无穷级数是发散的. 这个事实使得可以解决 Legendre 方程的固有值问题. 当 $l = n(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 时，所述的多项式解除了相差一个常数因子外可以统一地表为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n$$

称此 n 次多项式为 n 阶Legendre多项式，又称为第一类 n 阶 Legendre 函数，它是 n 阶 Legendre 方程在 $|x| \leqslant 1$ 上的有界解. 而此上述简明的公式又称为 Rodrigues 公式，它给 Legendre 多项式的研究带来了方便. 例如从此公式和应用分部积分可知：

当 m 为小于 n 的非负整数时

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x) \mathrm{d}x = 0$$

$P_n(x)$，$n = 0, 1, \cdots$ 构成 $[-1, 1]$ 上完备的正交系，且

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2n + 1}$$

前几阶 Legendre 多项式为

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

当 $l=n$ 时，除 $P_n(x)$ 外，n 阶 Legndre 方程基解组的另一个解可以是上述幂级数解中另一个具有无穷项的幂级数解，或者也可以利用 Liouvill 公式把另一个解表示出来，即

$$\begin{aligned}Q_n(x)&=P_n(x)\int\frac{1}{P_n^{\,2}(x)}\,\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k-3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}\end{aligned}$$

其中

$$N=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\ 为偶数\\[2mm]\dfrac{n+1}{2}, & n\ 为奇数\end{cases}$$

特别

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$Q_1(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-1$$

称 $Q_n(x)$ 为第二类 n 阶 Legendre 函数，它在 $x=1$ 和 $x=-1$ 邻近均是无界的，$P_n(x)$，$Q_n(x)$ 构成 n 阶 Legendre 方程的基解组. 对于一般的 $l(l\geqslant 0)$ 阶 Legendre 方程，也可类似的定义第一类和第二类勒让德函数 $P_l(x)$ 和 $Q_l(x)$，它们是 l 阶 Legendre 方程的基解组.

(ii) Legendre 方程的固有值问题.

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy+\lambda y=0, & |x|<1\\ |y(\pm 1)|<\infty\end{cases}$$

为 Legendre 方程的固有值问题，根据 S-L 理论和小目(i)中的讨论可知，$\lambda=n(n+1)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 为固有值，对应的固有

函数为 $P_n(x)$，它们构成 $[-1,1]$ 上完备的正交系.

(iii) 可化为 Legendre 方程的某些方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}+l(l+1)\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}-\operatorname{tg}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}+l(l+1)\Theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2}+\operatorname{cth}\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}+l(l+1)y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2}+\operatorname{th}\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}-l(l+1)y=0$$

分别作代换 $x=\cos\theta,\ \sin\theta,\ \operatorname{ch}\xi,\ i\operatorname{sh}\xi$，上述方程均化为 l 阶 Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+l(l+1)f=0$$

3.4.3 伴随 Legendre 方程和伴随 Legendre 函数

(i) 伴随 Legendre 函数. 称

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \qquad (6)$$

为 l 阶伴随 Legendre 方程，其中 m 为非负整数，在微分方程解析理论的节目中已讨论过此方程，显然类似于 l 阶 Legendre 方程的讨论，可以在正则点 0 展开来求在 $|x|<1$ 内的幂级数解. 但本目将采用变数代换等技巧来建立它和 Legendre 方程的联系，从而建立它的解. 为简单计仍设 $l\geqslant 0$.

令 $y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$，则

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+(l(l+1)-m(m+1))u=0 \qquad (7)$$

另一方面若 $v(x)$ 满足 l 阶 Legendre 方程

$$(1-x^2)v''-2xv'+l(l+1)v=0$$

两边求 m 次导数，则不难验证函数 $\frac{\mathrm{d}^mv}{\mathrm{d}x^m}$ 也满足方程(7)，所以方

程(6)的通解是

$$y(x) = c_1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x) + (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}Q_l(x)$$

记

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$$

$$Q_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}Q_l(x)$$

分别称之为 l 阶伴随第一类和第二类 Legendre 函数，当 l 不是整数时，它们构成 l 阶伴随 Legendre 方程(6)的基解组. 它们均在 $(-1, 1)$ 内无界. 当 $l=n$ 为整数时，则 $Q_n^m(x)$ 在 $(-1, 1)$ 仍然无界；而 $P_n^m(x)$ ，当 $n \geqslant m$ 时为在 $[-1, 1]$ 有界解，当 $n < m$ 时，则 $P_n^m(x) \equiv 0$ ，这时无在 $[-1, 1]$ 上非零有界解. 据此就解决下小目中伴随 Legendre 方程的固有值问题.

(ii) 伴随 Legendre 方程的固有值问题.

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + (\lambda - \dfrac{m^2}{1-x^2})y = 0, \ |x| < 1 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

为伴随 Legendre 方程的固有值问题，根据上小目(i)的分析和 S-L 理论可知，它的固有值是 $\lambda_n = n(n+1)$，$n = m, m+1, \cdots$ ，对应的固有函数是

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n \cdot n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(x^2-1)^n$$

它们构成 $[-1, 1]$ 上完备的正交系.

根据上述 $P_n^m(x)$ 的表达式可得

$$N_{nm}^2 = \int_{-1}^{1}(P_n^m(x))^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{(2^n \cdot n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\left[\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(x^2-1)^n\right]^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{(2^n \cdot n!)^2} \int_{-1}^{1} G(x) \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}} (x^2 - 1)^n \mathrm{d}x$$

其中

$$G(x) = (1 - x^2)^m \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}} (x^2 - 1)^n$$

$G(x)$ 是一 $n + m$ 次多项式，且以 ± 1 为它的 m 重根，分部积分 $(n + m)$ 次可得

$$N_{nm}^2 = \frac{(-1)^{n+m}}{(2^n \cdot n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}} G(x) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{2n + 1} \frac{(n + m)!}{(n - m)!}$$

和 Legendre 方程类似，有的方程经过一定的变换代换可变为伴随 Legendre 方程，例如，固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \mathrm{ctg}\theta \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0,\ 0 < \theta < \pi \\ |\Theta(0)| < \infty,\ |\Theta(\pi)| < \infty \end{cases}$$

若作代换 $x = \cos\theta$，则得伴随 Legendre 方程的固有值问题

$$\begin{cases} (1 - x^2) \dfrac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} - 2x \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{1 - x^2}\right)\Theta = 0 \\ |\Theta(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

所以原问题的固有值是 $\lambda_n = n(n + 1)$，对应的固有函数是

$$P_n^m(\cos\theta),\ n = m, m + 1, \cdots$$

它们构成 $[0, \pi]$ 上完备的带权函数 $\sin\theta$ 的正交系，定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(\theta)$ 可按此函数系展成广义的 Fourier 级数.

*3.4.4 其它一些方程的解和固有值问题，正交多项式

数学物理中还会出现一些变系数的二阶线性常微分方程和这些方程的固有值问题，求解这些方程常常需用微分方程的解析理

论和 S-L 固有值问题理论，有些方程的固有函数系和某些完备的带权正交的多项式系紧密相连. 所以我们可从另一个角度来建立某些方程的固有值问题，同时也就说明了固有函数系的完备性. 也就是说，先人为地建立某一完备的带某权函数 $\rho(x)$ 的在 $[a, b]$ 上的正交多项式系，再研究它们所满足的二阶线性常微分方程，根据 S-L 理论就可求出相应方程的固有值问题的固有值和固有函数.

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots \tag{8}$$

是一个最基本的多项式系，它对于任意一个区间来说是完备的，如果给定一个区间 $[a, b]$，适当地给定一个权函数 $\rho(x)$，把上述最基本的多项式系采用带权正交的正交化程序可得一个多项式系

$$Q_0(x), Q_1(x), \cdots, Q_n(x), \cdots$$

其中 $Q_n(x)$ 是一个 n 次多项式，显然它们构成 $[a, b]$ 上完备的带权的正交系. 然后研究这些函数所满足的二阶方程和边界条件，从而这些正交多项式系就是此二阶线性常微分方程的固有函数系，同时也自然会知道相应的固有值.

在区间 $[-1, 1]$ 上把最基本的多项式系(8)正交化可得 Legendre多项式系

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

所以显然它们构成 $[-1, 1]$ 上完备的正交系. 又可以证明 $P_n(x)$ 满足方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

所以根据 S-L 理论，固有值问题

$$\begin{cases} (1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

的固有值必为 $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$，对应的固有函数是 $P_n(x)$.

在 $[-1,1]$ 上，给定权函数 $\rho(x)=(1-x^2)^m$，m 为一个非负整数，把最基本的多项式(8)正交化，可得带权 $\rho(x)$ 的完备的正交多项式系

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x),\ n=m,\ m+1,\ \cdots$$

可以证明它满足方程

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+(n(n+1)-m(m+1))u=0$$

所以固有值问题

$$\begin{cases}(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+(\lambda-m(m+1))u=0\\|u(\pm 1)|<+\infty\end{cases}$$

必有固有值 $\lambda=\lambda_n=n(n+1),\ n=m,\ m+1,\ \cdots,\ \dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)$，为属于 λ_n 的固有函数. 它们构成 $[-1,1]$ 上完备的带权函数 $(1-x^2)^m$ 的正交系.

显然

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)$$

又构成 $[-1,1]$ 上完备的正交系，可以证明它满足方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

根据 S-L 理论，固有值问题

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y=0\\|y(\pm 1)|<+\infty\end{cases}$$

的固有值必为 $\lambda=\lambda_n=n(n+1),\ n=m,\ m+1,\ \cdots$ 对应的固有函数是 $P_n^m(x)$.

以上的结果在前边的内容中已经得到，现在又从新的角度来得出相同的结论，而且从新的角度来看固有函数系的完备性是自明的. 下面要用这种新的角度和方法来介绍一些新的二阶线性常微分方程的固有值问题，这些问题在近代物理和力学中有重要的

应用.

(i) n 阶 Tchebycheff 方程和 n 阶 Tchebycheff 多项式.

给定区间 $[-1, 1]$ 和权函数 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，把基本的多项式系(8)带权 $\rho(x)$ 正交化可得带权正交的多项式系

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

称 $T_n(x)$ 为 n 阶 Tchebycheff 多项式，例如

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1$$

易证 $T_n(x)$ 满足方程

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

称之为 n 阶 Tchebycheff 方程. 除了 $T_n(x)$ 外，易知，$U_n(x) = \sin(n\cos^{-1}x)$ 也是 n 阶 Tchebycheff 方程的一个解，称之为第二类 Tchebycheff 函数，此函数系也构成 $[-1, 1]$ 上完备的带权 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交系.

(ii) Jacobi 方程和 Jacobi 多项式.

给定 $[0, 1]$ 区间和权函数 $\rho(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$，其中 $q > 0$，$p - q + 1 > 0$，把基本多项式系(8)带权正交化得 $[0, 1]$ 带权 $\rho(x)$ 的正交完备多项式系

$$G_n(p, q, x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\cdots(q+n-1)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{q+n-1}(1-x)^{p-q+n}]$$

称之为 n 阶 Jacobi 多项式，$n = 0, 1, 2, \cdots$

可以证明 $G_n(p, q, x)$ 满足方程

$$x(1-x)y'' + [q - (p+1)]y' + n(n+p)y = 0$$

称之为 n 阶 Jacobi 方程. 所以 $G_n(p, q, x)$ 是固有值问题

$$\begin{cases} x(1-x)y'' + [q - (p+1)x]y' + \lambda y = 0 \\ |y(0)| < \infty,\ y(1) < \infty \end{cases}$$

对应于固有值 $\lambda = \lambda_n = n(n+p)$ 的固有函数. 把上述方程乘上权函数 $\rho(x)$ 即可成自共轭的方程.

取 p，q 某些特定的值就可得到各种不同的 Jacobi 方程的固有值问题和 Jacobi 多项式，特别当 $p=q=1$ 时，则 $\rho(x)=1$，

$$G_n(1,1,x)=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^n(1-x)^n]$$

若令 $t=2x-1$，则

$$G_n=P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[(1-t^2)^n]$$

相应的 Jacobi 方程的固有值问题就是 Legendre 方程的固有值问题

$$\begin{cases}(1-t^2)y''(t)-2ty'(t)+\lambda y=0\\ |y(\pm 1)|<\infty\end{cases}$$

(iii) Laguerre 方程及 Laguerre 多项式

给定 $[0,\infty]$ 和权函数 e^{-x}，把基本函数列(8)正交化可得 Laguerre 多项式系

$$L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x}),\ n=0,1,2,\cdots$$

可证，$L_n(x)$ 满足 n 阶 Laguerre 方程

$$xy''+(1-x)y'+ny=0$$

所以若讨论 Laguerre 方程的固有值问题

$$\begin{cases}xy''+(1-x)y'+\lambda y=0\\ |y(0)|<\infty,\ x\to+\infty \text{ 时，} |y(x)| \text{ 增长不超过一多项式}\end{cases}$$

则有固有值 $\lambda_n=n(n=0,1,2,\cdots)$，对应的固有函数为 $L_n(x)$，它们构成 $[0,\infty]$ 上完备的带权 e^{-x} 的正交系. 且

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}L_n^2(x)\mathrm{d}x=(n!)^2$$

如果令

$$u(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}y(x)$$

则可得固有值问题

$$xu''+u'+\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)u'+\lambda u=0$$

$$\int_0^{+\infty} u^2(x)\mathrm{d}x = 1$$

则它有固有值 $\lambda = \lambda_n = n(n = 0, 1, \cdots)$，对应的固有函数为

$$\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{L_n(x)}{n!}$$

(iv) 推广的 Laguerre 方程和推广的 Laguerre 多项式.

给定区间 $(0, +\infty)$ 和权函数 $\rho(x) = x^s\mathrm{e}^{-x}$, $(s > -1)$，把基本函数系(8)带权 $\rho(x)$ 正交化得到了推广的 Laguerre 多项式系

$$L_n^s(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^s}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^{n+s}\mathrm{e}^{-x})$$

可证明它满足推广了的 n 阶 Laguerre 方程

$$xy'' + (s + 1 - x)y' + ny = 0$$

所以广义 Laguerre 方程的固有值问题

$$\begin{cases} xy'' + (s + 1 - x)y' + \lambda y = 0 \\ |y(0)| < \infty,\ \text{当 } x \to +\infty \text{ 时，} |y(x)| \text{ 增长不超过多项式} \end{cases}$$

有固有值 $\lambda_n = n$ 对应的固有函数是 $L_n^s(x)$. 它们构成 $[0, +\infty]$ 上带权 $x^s\mathrm{e}^{-x}$ 完备的正交多项式系，且

$$\| L_n^s(x) \|^2 = \int_0^{+\infty} x^s\mathrm{e}^{-x}(L_n^s(x))^2\mathrm{d}x = n!\Gamma(n + s + 1)$$

如果令 $u(x) = x^{\frac{s}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}y(x)$，则可得固有值问题

$$\begin{cases} xu'' + u' - \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{s^2}{4x}\right)u + \left(\lambda + \dfrac{s + 1}{2}\right)u = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} u^2\mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} xu'' + u' - \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{s^2}{4x}\right)u + \mu u = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} u^2\mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

有固有值 $\mu=\mu_n=n+\frac{s+1}{2}$ $(n=0, 1, \cdots)$，对应的固函数是

$$u_n(x)=\frac{x^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{x}{2}}L_n^s(x)}{\sqrt{n!}\sqrt{\Gamma(n+s+1)}}$$

(v) Hermite 方程和 Hermite 多项式.

给定区间 $(-\infty, \infty)$ 和权函数 e^{-x^2}，把基本多项式系(8)带权正交化可得 Hermite 正交多项式系

$$H_n(x)=(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}-\cdots,\ n=0, 1, 2, \cdots$$

可证明 $H_n(x)$ 满足 n 阶 Hermite 方程

$$y''-2xy'+2ny=0$$

所以 Hermite 方程的固有值问题

$$\begin{cases} y''-2xy'+\lambda y=0 \\ x\to\pm\infty,\ |y(x)|\ \text{增长不超过多项式} \end{cases}$$

有固有值

$$\lambda_n=2n, \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

对应的固有函数为 $H_n(x)$. 它们构成 $[-\infty, \infty]$ 上权 e^{-x^2} 完备的正交系，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)dx=2^n\cdot n!\sqrt{\pi}$$

如果令 $u(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}y(x)$，则固有值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2}+(\lambda+1-x^2)u=0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}u^2(x)dx=1 \end{cases}$$

的固有值 $\lambda_n=2n$，对应的固有函数为

$$u_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}}}$$

本目讨论的各个方程的固有值问题中，$x = 0$ 或者是方程的正则点(如 Legendre 方程，伴随 Legendre 方程和 Hermite 方程)，或者 $x = 0$ 是方程的正则奇点而且有一个指标数为零，所以固有值实际上是由使方程的幂级数解变为多项式来确定的，而相应的多项式解就是固有函数，许多教材正是通过这种途径来讨论问题而得出上述的各种正交多项式，但本目从另一个角度，即从正交多项式出发来讨论问题，结论是一样的，把这两种方法加以比较是有益的.

本节中解析地求出了某些变系数二阶线性常微分方程的解，解析地解决了它们某些固有值问题，这些方程的解定义了一些特殊的函数，已有专门的著作详细地讨论了这些函数的各种性质，应用时可参考查阅. 应用这些函数就可以用分离变量法来解析地求解某些两个自变量二阶线性偏微分方程的定解问题. 例如应用 Bessell 函数，Legendre 多项式和伴随 Legendre 函数可以求解下列典型的定解问题.

例 1
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left((l - x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \ t > 0, \ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

在此问题中，$x = l$ 是方程的奇边界线，还应提自然边界条件，但常被省略不写出. 下面各问题的奇边界线也是如此，不再特别指明.

例 2
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \ t > 0, \ 0 < r < b \\ u|_{t=0} = \varphi(r) \\ u|_{r=b} = 0 \end{cases}$$

例 3 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0 \\ \qquad 0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi \\ u\big|_{r=a} = f(\theta) \end{cases}$

例 4 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\gamma^2}{r^2}u\right) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r) \\ u\big|_{r=b} = 0 \end{cases}$

例 5 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}u\right] = 0 \\ \qquad 0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi \\ u\big|_{r=a} = f(\theta) \end{cases}$

其中 m 是整数.

3.5 多个自变量时的分离变量法

3.5.1 分离变量法的概述，偏微分方程的固有值问题

用分离变量法解 n 个 ($n \geqslant 3$) 自变量偏微分方程定解问题的一般格式和两个自变量的情况相似，但这时出现的是 $(n-1)$ 个自变量的偏微分方程的固有值问题，在有些情况下对这固有值问题再用分离变量法求解，使之变为 $(n-1)$ 个常微分方程的固有值问题. 不失一般以四个自变量时的双曲型方程及抛物型方程的混合问题和三个自变量时椭圆型方程的边值问题加以说明，且为了简单计，均取第一类型的边界条件.

问题一
$$\begin{cases} \rho(M)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(M)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(k(M)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k(M)\dfrac{\partial u}{\partial z}\right),\ t > 0,\ M \in \Omega \\ u|_{t=0} = \varphi(M),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(M) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

其中 $M(x, y, z)$ 为空间变量，t 为时间，Ω 是三维空间 R^3 中的一有界区域，$\rho(M) > 0$，$k(M) > 0$.

设 $v(M)T(t)$ 是满足齐次方程和齐次边界条件的非零解，代入方程和边界条件并使变量分离得

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{1}$$

和偏微分方程的固有值问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(k(M)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(M)\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(M)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \lambda\rho(M)v = 0 \\ &v|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

和常微分方程的 S-L 问题相似，(2)也是一个自共轭的问题，它的全部特征值一定是正的无穷数列，通常记为 $\lambda = \lambda_{n,m,k}$，其中 (n, m, k) 是 R^3 中非负整点的一个无穷可列集，对应的固有函数系 v_{nmk} 构成区域 Ω 上带权 $\rho(M)$ 完备的正交系，并记

$$N_{nmk}^2 = \iiint_\Omega \rho(M) v_{nmk}^2(M)\,\mathrm{d}M$$

对于每一个 $\lambda = \lambda_{nmk}$ 解方程(1)得

$$T_{nmk}(t) = A_{nmk}\cos\sqrt{\lambda_{nmk}}t + B_{nmk}\sin\sqrt{\lambda_{nmk}}t$$

根据叠加原理，可令

$$u(M, t) = \sum_n \sum_m \sum_k \left(A_{nmk}\cos\sqrt{\lambda_{nmk}}t + B_{nmk}\sin\sqrt{\lambda_{nmk}}t\right) v_{nmk}(M)$$

由初始条件得

$$\begin{cases} \varphi(M) = \sum\sum\sum A_{nmk} v_{nmk}(M) \\ \psi(M) = \sum\sum\sum B_{nmk} \sqrt{\lambda_{nmk}} v_{nmk}(M) \end{cases}$$

这是 $\varphi(M)$，$\psi(M)$ 关于带权正交系 $v_{nmk}(M)$ 的广义的三元 Fourier 级数展开，可得

$$A_{nmk} = \frac{1}{N_{nmk}^2} \iiint\limits_{\Omega} \rho(M) v_{nmk}(M) \mathrm{d}M = \varphi_{nmk}$$

$$B_{nmk} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{nmk}}} \psi_{nmk}$$

所以最终得问题一的解

$$u(M, t) = \sum\sum\sum\Big(\varphi_{nmk} \cos\sqrt{\lambda_{nmk}}\, t + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{nmk}}} \psi_{nmk} \sin\sqrt{\lambda_{nmk}}\, t\right) v_{nmk}(M)$$

非齐次方程和非齐次边界条件时的处理方法和两个自变量的情况相似. 特别可以用齐次化原理来求非齐次方程时定解问题的解.

如果改为其它类型的边界条件其处理方法是类似的. 和两个自变量的情况相同，如果是在第二边值条件下，则 $\lambda = \lambda_0 = 0$ 是固有值问题(2)的一个固有值，对应的固有函数是 1.

在物理问题中，问题一描述的是三维空间 R^3 中有界区域 Ω 中某一物理场的振动过程，t 表示时间. 上述解的表达式相当于把一个复杂的振动分解为驻波

$$\left(\varphi_{nmk} \cos\sqrt{\lambda_{nmk}}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{nmk}}} \psi_{nmk} \sin\sqrt{\lambda_{nmk}}\, t\right) v_{nmk}(M)$$

的叠加，此驻波的频率 $\sqrt{\lambda_{nmk}}$ 和初始条件无关，称为固有频率，对于这一个驻波，$v_{nmk}(M) = 0$ 的点集称为它的波节面，在此节面

上此驻波保持为零.

对于四个自变量时抛物型方程混合问题用分离法求解的过程是完全类似的.

用分离变量法求解三个自变量椭圆型方程的边值问题时，要根据具体的情况适当选取关于其中两个自变量的函数来提固有值问题.

问题二
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(k(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \qquad +a(z)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ (x, y)\in\Omega,\ 0<z<l \\ u|_{z=0}=f_1(x, y),\ u|_{z=l}=f_2(x, y) \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

其中 Ω 是 R^2 中的一个区域，$\partial\Omega$ 是它的边界，$k(x, y)>0$，$a(z)>0$.

设 $V(x, y)Z(z)$ 是满足齐次方程和齐次边界条件的非零解，代入方程和边界条件使变量分离得

$$a(z)Z''-\lambda Z=0 \tag{3}$$

和固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x, y)\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(k(x, y)\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)+\lambda V=0 \\ V|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{4}$$

此固有值问题(4)的全部固有值是一正数序列，记为 $\lambda=\lambda_{nm}$，(n, m) 是二维空间中非负整点的一个无穷可列集合，对应的固有函数 $V_{nm}(x, y)$ 构成 Ω 上完备的正交系.

对每一个 $\lambda=\lambda_{nm}$ 解(3)得

$$Z_{nm}(z)=A_{nm}Z_{nm}^{(1)}(z)+B_{nm}Z_{nm}^{(2)}(z)$$

根据叠加原理可令

$$u(x, y, z)=\sum_n\sum_m\left(A_{nm}Z_{nm}^{(1)}(z)+B_{nm}Z_{nm}^{(2)}(z)\right)V_{nm}(x, y)$$

又由 $z=0$ 和 $z=l$ 的边界条件得

$$
\begin{cases}
f_1(x, y) = \sum\sum(A_{nm}Z_{nm}^{(1)}(0) + B_{nm}Z_{nm}^{(2)}(0))V_{nm}(x, y) \\
f_2(x, y) = \sum\sum(A_{nm}Z_{nm}^{(1)}(l) + B_{nm}Z_{nm}^{(2)}(l))V_{nm}(x, y)
\end{cases}
$$

由此根据二元广义的 Fourier 级数展开可唯一地确定 A_{nm} 和 B_{nm}，从而也得到问题的解 $u(x, y, z)$.

用分离变量法解 n 个自变量的定解问题时中心的一环是解 $(n-1)$ 个自变量的偏微分方程的固有值问题，在一定条件下又可用分离变量法把它变为 $(n-1)$ 个常微分方程的固有值问题，这时在具体求解定解问题时可以直接完成全部变量分离的手续而得 n 个常微分方程，其中有 $(n-1)$ 常微分方程的固有值问题.

例 1
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), t > 0, (x, y) \in \Omega \\
u|_{t=0} = \varphi(x, y), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y) \\
u|_{\partial\Omega} = 0
\end{cases}
$$

其中 $\partial\Omega$ 是矩形域 $\Omega\{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant h\}$ 的边界.

设 $X(x)Y(y)T(t)$ 是满足齐次方程和齐次边界条件的非零解，代入方程和齐次边界条件得

$$
T''(t) + a^2(\lambda + \mu)T = 0 \tag{5}
$$

和固有值问题

$$
\begin{cases}
X'' + \lambda X = 0 \\
X(0) = 0, X(l) = 0
\end{cases} \tag{6}
$$

$$
\begin{cases}
Y'' + \mu Y = 0 \\
Y(0) = 0, Y(h) = 0
\end{cases} \tag{7}
$$

解固有值问题(6)和(7)分别得

$$
\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2，对应的固有函数 \sin\frac{n\pi}{l}x
$$

$$
\mu = \mu_m = \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2，对应的固有函数 \sin\frac{m\pi}{h}y
$$

对于 $\lambda = \lambda_n$，$\mu = \mu_m$ 解方程(5)得

$$
T_{nm} = A_{nm}\cos a\gamma_{nm}t + B_{nm}\sin a\gamma_{nm}t
$$

其中 $n = 1, 2, \cdots, m = 1, 2, \cdots, \gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}$.

根据叠加原理，令

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{nm}(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{h}y$$

由初始条件得

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{h}y$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}\, a\gamma_{nm}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{h}y$$

这是二元函数按函数系 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{h}y\right\}$ 的二元 Fourier 级数展开，故

$$A_{nm} = \frac{4}{lh}\int_0^l\int_0^h \varphi(x, y)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{h}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \varphi_{nm}$$

$$B_{nm} = \frac{1}{a\gamma_{nm}}\psi_{nm}$$

所以最终得解

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varphi_{nm}\cos a\gamma_{nm}t + \frac{1}{a\gamma_{nm}}\psi_{nm}\sin a\gamma_{nm}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{h}y$$

在此例题中，实际上

$$v_{nm}(x, y) = \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{h}y$$

是固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \beta v = 0, & (x, y) \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

对应于固有值 $\beta = \beta_{nm} = \gamma_{nm}^2$ 的固有函数.

和固有值问题(8)紧密相联系是二维 Helmholtz 方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u + ku = 0, (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{9}$$

显然，当 $k \leqslant 0$ 时，由于 k 不是问题(8)的固有值，所以(9)的解是唯一的，这时可以证明，对任意的 φ 问题(9)的解是存在的. 当 $k > 0$ 而不是(8)的固有值时，问题(9)的解也是唯一的，这时也可证明对任意的 φ 问题(9)的解也是存在的. 当 $k > 0$ 而且 k 是问题(8)的固有值时，则如果(9)有解存在，则必然不是唯一的，因为它可以相差一个固有值问题(8)的属于固有值 k 的任意一个固有函数，这时若设问题(9)有解 $u(x, y)$，设 $v(x, y)$ 是问题(8)属于固有值 k 的任意固有函数，则应用 Green 公式

$$\iint_{\Omega} [v(\Delta_2 u + ku) - u(\Delta_2 v + kv)] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) = 0$$

所以必有

$$\oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s = \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s = 0$$

这是问题(9)有解的必要条件，可以证明这也是问题(9)有解的充分条件.

上述关于问题(9)的讨论也可推广到非齐次方程的边值问题和一般的区域，即

$$\begin{cases} \Delta_2 u + ku = f(x, y), (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{10}$$

而有下列结论：当 k 不是(8)的固有值时，则问题(10)的解唯一，这时可证明对任意的 f 和 φ 问题(10)的解也是存在的. 当 k 是(8)的一个固有值时，设 $v(x, y)$ 是属于此固有值的任意一个固有函数，则问题(10)有解的充分必要条件是

$$\iint_{\Omega} v(x, y) f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s$$

当此条件满足时，问题(10)的解可以相差任意一个固有函数.

上述的讨论可以完全类似地推广到三维调和方程的固有值问题和三维 Helmholtz 方程边值问题的情况，而且可以推广到其它边界条件下的问题. 以上的有关结论在以后的讨论中将直接被引用.

以上结论表明，如果问题(9)或问题(10)的解唯一，即齐次问题只有零解，则对于任意的 φ 和 f 问题(9)或(10)的解必然存在. 反之若问题(9)或(10)的解不唯一，即齐次问题有非零解，则不是对任意的 φ 和 f 问题(10)有解，但可以找到问题有解的充分必要条件. 这和代数线性方程

$$Ax = b$$

的情况完全类似，其中 A 是一个 n 阶矩阵，b 和 x 是 n 维列向量，如果方程的解唯一，即 $Ax = 0$ 只有零解，则对于任意的 b 方程有唯一解. 如果方程的解不唯一，即 $Ax = 0$ 有非零解，则方程有解的充要条件是 A 的秩等于 (A, b) 的秩.

3.5.2 柱形域的混合问题或边值问题，柱函数

本目讨论用分离变量求解三个典型方程在圆柱形域上的混合问题或边值问题，这时必然会出现 Bessell 函数，所以又称 Bessell 函数为柱函数. 求解的格式是一样的，由于自变量的增加，演算和表达式较为繁长，为简单计，问题或例题中大多取为第一类边界条件，而且由于求解的格式大多相同，所以有的过程从简.

$$\text{问题一}\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \ t > 0, \ 0 < r_0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \\ u|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 这可解释为在三维空间 (x, y, z) 中一个无穷长的柱体 $x^2 + y^2 < r_0^2$ 内求解一个热传导的问题，而温度分布和 z 变量无关.

为了用分离变量法时一气就做到把所有的变量分开，所以空间变量 (x, y) 改用极坐标 (r, θ)，则得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \\ \qquad\qquad t > 0,\ 0 < r < r_0,\ 0 < \theta < 2\pi \\ u|_{t=0} = \varphi(r, \theta) \\ u|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

另外 $u(r, \theta, t)$ 关于 θ 应满足周期性条件，当 $r \to 0$ 时应满足自然边界条件.

求满足齐次方程和齐次边界条件(包括周期性条件)的非零解 $R(r)\Theta(\theta)T(t)$，代入方程并使变量分离得

$$T'(t) + a^2\lambda T = 0 \tag{11}$$

和下列两个常微分方程的固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi),\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \mu)R = 0 \\ |R(0)| < +\infty,\ R(r_0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

解固有值问题(12)得固有值 $\mu = \mu_n = n^2$，对应的固有函数为 $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $n = 0, 1, 2, \cdots$，对于每一个 $\mu_n = n^2$ 解固有值问题(13)，这是一个 n 阶 Bessell 方程的固有值问题，它的固有值是 $\lambda = \lambda_{nk} = w_{nk}^2$，其中 w_{nk} 是 $J_n(xr_0)$ 的第 k 个正零点，即 $J_n(w_{nk}r_0) = 0$，对应的固有函数是 $J_n(w_{nk}r)$.

对于每一个 $\lambda = \lambda_{nk} = w_{nk}^2$，解方程(11)得

$$T_{nk}(t) = A_{nk}\mathrm{e}^{-a^2w_{nk}^2t}$$

根据叠加原理，令

$$u(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k}e^{-a^2w_{0k}^2t}J_0(w_{0k}r)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2w_{nk}^2t}(A_{nk}\cos n\theta+B_{nk}\sin n\theta)J_n(w_{nk}r)$$

根据初始条件得

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{0k}J_0(w_{0k}r)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{nk}J_n(w_{nk}r)\cos n\theta+B_{nk}J_n(w_{nk}r)\sin n\theta)$$

此为二元函数 $\varphi(r,\theta)$ 按固有函数系 $\{J_0(w_{0k}r, J_n(w_{nk}r)\cos n\theta, J_{nk}(w_{nk}r)\sin n\theta \mid n=1, 2, \cdots)\}$ 的广义的二元 Fourier 级数展开，此函数系是固有值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 v+\lambda v=0, & r<r_0\\ v|_{r=r_0}=0\end{cases}$$

的固有函数系，对应的固有值是 $\lambda=\lambda_{nk}=w_{nk}^2$，$n=0, 1, 2, \cdots$，$k=1, 2, \cdots$，在直角坐标 (x, y) 下，此固有函数系构成圆域 $r\leqslant r_0$ 完备的正交系，在极坐标 (r, θ) 下它们构成矩形域 $0\leqslant r\leqslant r_0$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上完备的带权函数 r 的正交系，权函数 r 就是极坐标变换的 Jacobi 行列式，所以可得

$$A_{nk}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r_0}r\varphi(r,\theta)J_0(w_{nk}r)\cos n\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r_0}rJ_n^2(w_{nk}r)\cos^2 n\theta\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{2}{\pi r_0^2J_n^{2'}(w_{nk}r_0)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r_0}r\varphi(r,\theta)J_n(w_{nk}r)\cos n\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\varphi_{nkc}$$

$$B_{nk}=\frac{2}{\pi r_0^2J_n'^2(w_{nk}r_0)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r_0}r\varphi(r,\theta)J_n(w_{nk}r)\sin n\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\varphi_{nks}$$

$$A_{0k}=\frac{1}{\pi r_0^2J_n'^0(w_{0k}r_0)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r_0}r\varphi(r,\theta)J_0(w_{0k}r)\mathrm{d}\theta$$

$$= \varphi_{0k}$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

所以最终得问题一的解为

$$u(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0k} e^{-a^2 w_{0k}^2 t} J_0(w_{0k} r)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{nkc}\cos n\theta + \varphi_{nks}\sin n\theta) J_n(w_{nk} r) \mathrm{e}^{-a^2 w_{nk}^2 t}$$

特别如果 $\varphi(r, \theta) = \varphi(r)$ 和 θ 无关，则 $u = u(r, t)$，实际上成了两个自变量偏微分方程的定解问题，这时

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0k} \mathrm{e}^{-a^2 w_{0k}^2 t} J_0(w_{0k} r)$$

其中

$$\varphi_{0k} = \frac{2}{r_0^2 J_0'^2(w_{0k} r_0)} \int_0^{r_0} r\varphi(r) J_0(w_{0k} r) \mathrm{d}r$$

问题二 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u, \ t > 0, \ (x, y, z) \in \Omega \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

其中 Ω 是一有限的圆柱体 $x^2 + y^2 < r_0^2$，$0 < z < l$.

关于空间变量 (x, y, z) 改用柱坐标 (r, θ, z)，则得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ u|_{t=0} = \varphi(r, \theta, \varphi) \\ u|_{z=0} = 0, \ u|_{z=l} = 0 \\ u|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant r_0$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant z \leqslant l$. 照例当 $r = 0$ 时应加自然边界条件，对 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$ 应加周期性条件.

设 $R(r)\Theta(\theta)T(t)Z(z)$ 为满足齐次方程和齐次边界条件(包括自然边界条件和周期性条件)的非零解，代入方程和边界条件并使变量分离得

$$T' + a\lambda T = 0 \tag{14}$$

和下列三个固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi),\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} Z'' + \beta Z = 0 \\ Z(0) = 0,\ Z(l) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + ((\lambda - \beta)r^2 - \mu)R = 0 \\ |R(0)| < \infty,\ R(r_0) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

分别解固有值问题(15)和(16)得：

固有值 $\mu = \mu_n = n^2$，对应的固有函数为 $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 固有值 $\beta = \beta_m = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$，对应的固有函数是 $\sin \frac{m\pi}{l} z$, $m = 1, 2, \cdots$.

给定 $\mu = \mu_n$, $\beta = \beta_m$ 解固有值问题(17)，得固有值 $\lambda_{nkm} = \beta_m + w_{nk}^2$，对应的固有函数是 $J_n(w_{nk} r)$，其中 w_{nk} 是 $J_n(wr_0) = 0$ 的第 k 个正根.

对于 $\lambda = \lambda_{nkm}$，解方程(14)得

$$T_{nkm}(t) = A_{nkm} e^{-a^2 \lambda_{nkm} t}$$

根据叠加原理，令

$$u(r, \theta, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{0km} J_0(w_{0k} r) \sin \frac{m\pi}{l} z e^{-a^2 \lambda_{0km} t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{nkm} \cos n\theta + B_{nkm} \sin n\theta) J_n(w_{nk} r) \sin \frac{m\pi}{l} z e^{-a^2 \lambda_{nkm} t}$$

由初始条件得

$$\varphi(r, \theta, z) = \sum \sum A_{0km} J_0(w_{0k} r) \sin \frac{m\pi}{l} z$$

$$+ \sum \sum \sum (A_{nkm} \cos n\theta + B_{nkm} \sin n\theta) J_n(w_{nk} r) \sin \frac{m\pi}{l} z$$

这是三元函数按函数系 $\{J_n(w_{nk} r) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{l} z,\ J_n(w_n r) \sin n\theta \sin$

$\frac{m\pi}{l}z\}$ 的广义 Fourier 级数展开，此函数系是三维调和方程关于柱域 Ω 的第一边值下的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 V + \lambda V = 0, (x, y, z) \in \Omega \\ V|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的固有函数系，相应的固有值 $\lambda = \lambda_{nkm}$. 在直角坐标下，它们构成柱域 Ω 上完备的正交系，在柱坐标下，它们构成长方形域 $\{0 \leqslant r \leqslant r_0, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant l\}$ 上完备的带权 r 的正交系. 所以可以唯一地确定 A_{nkm} 和 B_{nkm} 得

$$A_{nkm} = \frac{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^l \mathrm{d}z \int_0^{r_0} rJ_n(w_{nk}r)\cos n\theta \sin \frac{m\pi}{l} z\varphi(r, \theta, z)\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^l \mathrm{d}z \int_0^{r_0} rJ_n^2(w_{nk}r)\cos^2 n\theta \sin^2 \frac{m\pi}{l} z\mathrm{d}r}$$

$$= \varphi_{nkm}, n = 0, 1, 2, \cdots, k = 1, 2, \cdots, m = 1, 2, \cdots$$

$$B_{nkm} = \varphi_{nkm}, n = 1, 2, \cdots, k = 1, 2, \cdots, m = 1, 2, \cdots$$

φ_{nkm} 是在 φ_{nkm} 的表达式中把 $\cos n\theta$ 代为 $\sin n\theta$，但 n 不取整数 0.

所以最终得问题二的解

$$u(r, z, \theta, t) =$$

$$\sum\sum\sum(\varphi_{nkm}\cos n\theta + \varphi_{nkm}\sin n\theta) J_n(w_{nk}r)\sin \frac{m\pi}{l} z e^{-a^2\lambda_{nkm}t}$$

如果把问题一和问题二改为波动方程的混合问题，其解法类似，尤其是固有函数系完全相同，这时的解变为驻波的叠加.

问题三 $$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, (x, y, z) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

其中 Ω 为有界的圆柱体 $x^2 + y^2 < r^2$, $0 < z < l$.

应用圆柱坐标 (r, θ, z)，则得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ u|_{z=0} = f_1(r, \theta), u|_{z=l} = f_2(r, \theta) \\ u|_{r=r_0} = g(\theta, z) \end{cases}$$

另外还有对于边界 $r = 0$ 的自然边界条件及边界 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$

的周期性条件均是齐次性条件.

根据叠加原理 $u=u_1+u_2$. 其中

$$\begin{cases}\Delta_3 u_1=0\\ u_1|_{z=0}=f_1(r,\theta),\ u_1|_{z=l}=f_2(r,\theta)\\ u_1|_{r=r_0}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_3 u_2=0\\ u_2|_{z=0}=0,\ u_2|_{z=l}=0\\ u_2|_{r=r_0}=g(\theta,z)\end{cases}$$

利用分离变量法求解 u_1，可令

$$u_1(r,\theta,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{nk}\cos n\theta+B_{nk}\sin n\theta)J_n(w_{nk}r)\operatorname{ch}w_{nk}z$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(C_{nk}\cos n\theta+D_{nk}\sin n\theta)J_n(w_{nk}r)\operatorname{sh}w_{nk}z$$

其中 w_{nk} 是 $J_n(wr_0)$ 的第 k 个正零点.

再由边界条件

$$u_1|_{z=0}=f_1(r,\theta)$$

$$u_1|_{z=l}=f_l(r,\theta)$$

根据二元函数按函数系 $\{\cos n\theta J_n(w_{nk}r),\ \sin n\theta J_n(w_{nk}r)\}$ 的广义二元 Fourier 级数展开可唯一地确定 A_{nk}，B_{nk}，C_{nk}，D_{nk}，从而确定出 $u_1(r,\theta,z)$.

如果 $f_1(r,\theta)=f_1(r)$，$f_2(r,\theta)=f_2(r)$，即和 θ 无关，那么 $u_1=u_1(r,z)$，实际上是两个自变量的问题，用分离变量法可令

$$u_1(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}[A_{0k}\operatorname{ch}w_{0k}z+C_{0k}\operatorname{sh}w_{0k}z]J_0(w_{0k}r)$$

再由

$$\begin{cases}f_1(r)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}A_{0k}J_0(w_{0k}r)\\ f_2(r)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(A_{0k}\operatorname{ch}w_{0k}l+C_{0k}\operatorname{sh}w_{0k}l)J_0(w_{0k}r)\end{cases}$$

根据函数按函数系 $\{J_0(w_{0k}r)\,|\,m=1,2,\cdots\}$ 的广义 Fourier 展开可唯一确定 A_{0k} 和 C_{0k}，从而确得 $u_1(r,z)$.

利用分离变量法求解 $u_2(r,\theta,z)$，可令

$$u_2(r,\theta,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[A_{nm}\cos n\theta+B_{nm}\sin n\theta]\sin\frac{m\pi}{l}zI_n(\frac{m\pi}{l}r)$$

又由边界条件

$$u_2|_{r=r_0}=g(\theta,z)$$

即

$$g(\theta,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{nm}\cos n\theta+B_{nm}\sin n\theta)\sin\frac{m\pi}{l}zI_n\left(\frac{m\pi}{l}r_0\right)$$

根据二元函数按函数系 $\{\cos n\theta\sin\frac{m\pi}{l}z,\ \sin n\theta\sin\frac{m\pi}{l}z\}$ 的广义 Fourier 级数展开可唯一确定 A_{nm}, B_{nm}，从而得出 $u_2(r,\theta,z)$.

如果 $g(\theta,z)=g(z)$，即与 θ 无关，那么 $u_2=u_2(r,z)$，这时实际上是两个自变量的问题，用分离变量法可令

$$u_2(r,z)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}I_0\left(\frac{m\pi}{l}z\right)\sin\frac{m\pi}{l}z$$

由边界条件 $u|_{r=r_0}=g(z)$ 得

$$g(z)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}I_0\left(\frac{m\pi}{l}r_0\right)\sin\frac{m\pi}{l}z$$

所以

$$A_{0m}=\frac{1}{I_0\left(\frac{m\pi}{l}r_0\right)}\frac{2}{l}\int_0^l g(z)\sin\frac{m\pi}{l}z\mathrm{d}z=\frac{g_m}{I_0\left(\frac{m\pi}{l}r_0\right)}$$

得

$$u_2(r,z)=\sum_{m=1}^{\infty}g_m\cdot\frac{1}{I_0\left(\frac{m\pi}{l}r_0\right)}I_0\left(\frac{m\pi}{l}r\right)\sin\frac{m\pi}{l}z$$

3.5.3 球形域的边值问题和混合问题，球函数，球 Bessell 函数

(i) 球坐标下调和方程分离变量的解，球函数.

在球坐标下三维调和方程为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

在 $\Delta_3 u$ 球坐标下的表达式中，第一项是表示对径向的作用，第二项中括号内的部分表示对角 (θ, φ) 的作用，称之为在球面上的 **Laplace** 算子，物理上称为矩算子，记为

$$\Delta_{(\theta,\varphi)} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

所以三维 **Laplace** 方程又可写为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{(\theta,\varphi)} u = 0$$

其中 $0 \leqslant r < +\infty$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，由于这个坐标系的特殊选取，方程在 $r = 0$，$\theta = 0$，$\theta = \pi$ 出现奇性，应该提自然边界条件，而对于 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 2\pi$ 应该提周期性条件，这些边界条件均为齐次条件.

设 $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 是方程分离变量且满足上述齐次边界条件的非零解，可得

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{18}$$

和下列两固有值问题

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi),\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \left[\lambda - \dfrac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \\ |\Theta(0)| < \infty,\ |\Theta(\pi)| < +\infty \end{cases} \tag{20}$$

解固有值问题(19)，得固有值 $\mu = \mu_m = m^2$，对应的固有函数是 $\cos m\varphi$，$\sin m\varphi$，$m = 0, 1, 2, \cdots$.

对于取定的 $\mu = \mu_m = m^2$ 解固有值问题(20)，只要令 $\cos\theta = x$，则变为伴随 **Legendre** 方程的固有值问题

$$\begin{cases} (1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2})\Theta=0 \\ |\Theta(\pm 1)|<\infty \end{cases}$$

所以问题(20)的固有值是

$$\lambda=\lambda_n=n(n+1),\ n=m,\ m+1,\ \cdots$$

对应的固有函数是 $P_n^m(\cos\theta)$.

对于每一个 $\lambda=\lambda_n=n(n+1)$ 求解 **Euler** 方程(18)得

$$R_n(r)=A_n r^n+B_n\frac{1}{r^{n+1}}$$

所以得到在球坐标下调和方程分离变量的解族

$$r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

$$\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ \frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

其中 $n=0,1,2,\cdots,m=0,1,\cdots,n$. 称这些函数为球体函数，可以证明前两组球体函数回到坐标 (x,y,z) 时是 (x,y,z) 的 n 次齐次调和多项式.

称

$$Y_n^{m(1)}(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ Y_n^{m(2)}(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

为球面函数或球函数，球函数系构成 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 完备的带权函数 $\sin\theta$ 的正交系，即单位球面上完备的正交系.

当 $m=0$ 时

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{2}{2n+1}$$

当 $m\neq 0$ 时

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\left(P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\right)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

实际上，球面函数是球面上 **Laplace** 算子的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_{(\theta,\varphi)}V+\lambda V=0 \\ V(\theta,\varphi)\ \text{定义在单位球面上} \end{cases}$$

的固有函数系，固有值 $\lambda=\lambda_n=n(n+1)$，对应着 $(2n+1)$ 个固有函数

$$P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi,\ m=0,1,2,\cdots n.$$

任意定义在单位球面上的函数 $f(\theta,\varphi)$ 可按球面函数系展开，即

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(f_{nm}^{(1)}\cdot\cos m\varphi+f_{nm}^{(2)}\cdot\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)$$

其中

$$f_{nm}^{(1)}=\frac{2n+1}{2\delta_m\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\cos m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$f_{nm}^{(2)}=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\sin m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\delta_m=\begin{cases}1,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\2,\ m=0\end{cases}$$

(ii) 球坐标下 **Helmholtz** 方程分离变量的解，球 **Bessell** 函数.

球坐标下 **Helmholtz** 方程为

$$\Delta_3 u\pm k^2u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{(\theta,\varphi)}u\pm k^2u=0$$

直接令方程分离变量的解为

$$R(r)Y_n^m(\theta,\varphi)$$

由于

$$\Delta_{(\theta,\varphi)}Y_n^m(\theta,\varphi)=-n(n+1)Y_n^m(\theta,\varphi)$$

所以，$R(r)$ 满足

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}R\pm k^2R=0$$

即

$$r^2R''+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+(\pm k^2r^2-n(n+1))R=0$$

当 k^2 前取"+"时 $R(r)$ 的两上线性无关的解为 n 阶球 **Bessell** 函数

$$\sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2r}}N_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

所以 **Helmholtz** 方程分离变量的解为

$$\sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr)Y_n^m(\theta,\ \varphi),\ \sqrt{\frac{\pi}{2r}}N_{n+\frac{1}{2}}(kr)Y_n^m(\theta,\ \varphi)$$

当 k^2 前取负号时 **Helmholtz** 方程分离变量的解为

$$\sqrt{\frac{\pi}{2r}}I_{n+\frac{1}{2}}(kr)Y_n^m(\theta,\ \varphi),\ \sqrt{\frac{\pi}{2r}}K_{n+\frac{1}{2}}(kr)Y_n^m(\theta,\ \varphi)$$

(iii) 三个典型方程球形域的混合问题和边值问题

问题一 $\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ r < r_0 \\ u|_{r=r_0} = f(x,\ y,\ z)|_{r=r_0} \end{cases}$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 利用球坐标 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 和分离变量法可直接设解 $u(r,\ \theta,\ \varphi)$ 为球体函数的叠加，即令

$$u(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)r^n P_n^m(\cos\theta)$$

根据边界条件得

$$f(\theta,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)r_0^n P_n^m(\cos\theta)$$

所以

$$A_{nm} = \frac{f_{nm}^{(1)}}{r_0^n},\ B_{nm} = \frac{f_{nm}^{(2)}}{r_0^n}$$

其中 $f_{nm}^{(1)}$, $f_{nm}^{(2)}$ 是 $f(\theta,\ \varphi)$ 按球面函数系展开的 **Fourier** 级数的系数，所以最终得解

$$u(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(f_{nm}^{(1)}\cos m\varphi + f_{nm}^{(2)}\sin m\varphi)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n^m(\cos\theta)$$

特别，如果 $f(\theta,\ \varphi)=f(\theta)$，即和 φ 无关，则解也是轴对称的，实际上是一两个自变量的边值问题，可令

$$u(r,\ \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n P_n(\cos\theta)$$

由边值条件可唯一确定 a_n 而得问题的解.

对于外部问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \; r > r_0 \\ u\big|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi) \\ \lim\limits_{r\to\infty} u = 0 \end{cases}$$

则用分离变量法求解，可令

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)$$

再由边界条件可唯一地确定 A_{nm}，B_{nm}，从而得到问题的解.

其它类型的边界条件 $\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{r=r_0} = f$ 时，求解的方法是类似的. 而在第二类型的边界条件时，问题有解的充要条件是

$$\iint\limits_{r=r_0} f\mathrm{d}s = r_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 0$$

问题二 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_3 u = 0, \; r > 0, \; r < r_0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \\ u\big|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

利用球坐标 (r, θ, φ)，则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\Delta_{(\theta,\varphi)}u\right) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r, \theta, \varphi) \\ u\big|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

利用分离变量法求解，可直接令分离变量的解为 $T(t)R(r)Y_n^m(\theta, \varphi)$，代入方程和齐次边界条件得

$$T' + a^2\lambda T = 0 \tag{21}$$

和固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) - \dfrac{n(n+1)}{r^2}R + \lambda R = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

对于每一个给定的$n(n=0, 1, 2, \cdots)$此为球 **Bessell** 方程的固有值问题，其固有值为$\lambda_{nk} = w_{nk}^2$，对应的固有函数是

$$\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)$$

其中w_{nk}是$J_{n+\frac{1}{2}}(wr_0) = 0$的第$k$个正零点.

对于每一个$\lambda = \lambda_{nk} = w_{nk}^2$解方程(21)得基础解为

$$\mathrm{e}^{-a^2w_{nk}^2t}$$

根据叠加原理，令

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nmk}\cos m\varphi + B_{nmk}\sin m\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{-a^2w_{nk}^2t}$$

由初始条件得

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nmk}\cos m\varphi + B_{nmk}\sin m\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)P_n^m(\cos\theta)$$

由三元函数的广义 **Fourier** 级数展开可唯一地确定A_{nmk}，B_{nmk}，从而得出问题二的解.

从分离变量的过程可知，三维调和方程的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 V + \lambda V = 0, \ r < r_0 \\ V|_{r=r_0} = 0 \end{cases}$$

的固有值是$\lambda = \lambda_{nk} = w_{nk}^2$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，$k = 1, 2, \cdots$，其中$w_{nk}$是$J_{n+\frac{1}{2}}(wr_0)$的第$k$个正零点，每一个固有值$w_{nk}^2$，对应着$2n+1$个线性无关的固有函数

$$\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

$m=0, 1, 2, \cdots, n$. 此固有函数系构成在球内 $r \leqslant r_0$ 上完备的正交系. 若在球坐标 (r, θ, φ) 下，则构成长方体域 $\{0 \leqslant r \leqslant r_0, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ 上完备的带权函数 $r^2\sin\theta$ 的正交系.

如果把问题二改为三维波动方程球形域的混合问题，用分离变量法求解的过程是类似的而固有值问题则完全相同，这时解是驻波的迭加.

如果初始条件 $\varphi(r, \theta, \varphi)=\varphi(r, \theta)$，即轴对称，则问题二的解也是轴对称的，这时实际上只有两个空间变量 (r, θ)，可设

$$u(r, \theta, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{nk}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)P_n(\cos\theta)\mathrm{e}^{-a^2w_{nk}^2t}$$

a_{nk} 由初始条件和广义二元 **Fourier** 级数展开而唯一确定.

3.5.4 Helmholtz 方程的边值问题，恒稳振动

(i) 三维 **Helmhotz** 方程的边值问题.

设

$$\begin{cases}\Delta_3 u+cu=f(M), M\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(N)\end{cases}\tag{23}$$

其中 Ω 是 R^3 中有界的区域，$\partial\Omega$ 是它的光滑的或逐片光滑的边界，前已提及，此问题的解和 c 的取值有很大关系.

如果 c 不是固有值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 V+\lambda V=0\\ V|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{24}$$

的固有值，则问题(23)对任意的 $f(M)$，$\varphi(N)$ 存在唯一的解，对某些特殊的区域(如长方体，球域，柱域)可用分离变量法求解.

如果 c 是(24)的一个固有值，那么(23)有解的充要条件是

$$\iiint\limits_{\Omega}f(M)V_c(M)\mathrm{d}M=-\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial V_c}{\partial n}\mathrm{d}s$$

其中 $V_c(M)$ 是问题(24)的属于固有值 c 的任意固有函数，此时当问题(23)有解时，解不是唯一的，可以相差问题(24)的属于固有值 c 的任意固有函数，对于某些特殊区域也可用分离变量法求出

(23)的解.

例 1 $\begin{cases}\Delta_3 u + cu = 0, & r < r_0 \\ u|_{r=r_0} = \varphi(N)\end{cases}$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

当 $c \leqslant 0$ 时，此问题有唯一解，在球坐标 (r, θ, φ) 下，用分离变量法，可令

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nmk}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{-c}r)P_n^m(\cos\theta)$$

再由边界条件可唯一确定 A_{nm}, B_{nm} 而得出例 1 的解.

当 $c > 0$，但 c 不是调和方程关于球域第一边值问题的固有值问题的固有值时，用分离变量法求解. 可令

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(A_{nmk}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{c}\, r)P_n^m(\cos\theta)$$

再由边界条件唯一确定 A_{nm}, B_{nm}.

当 $c > 0$，且 c 是固有值问题(24)的一个固有值时，例如设 $c = w_{lk}^2$，其中 w_{lk} 是 $J_{l+\frac{1}{2}}(wr_0)$ 的第 k 个正零点，则固有值 w_{lk}^2 对应问题(24)的固有函数是

$$\frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\quad \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

$m = 0, 1, 2, \cdots, l$. 这时(23)有解的充要条件是

$$\iint\limits_{r=r_0} \varphi P_l^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(w_{lk}r)}{\sqrt{r}}\right)ds = 0$$

当此条件满足时，也可设

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)$$

$$\cdot P_n^m(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)$$

根据边界条件

$$\varphi(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)$$

$$\cdot P_n^m(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{r_0}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r_0)$$

由此，A_{ls}，$B_{ls}(s=0,1,2,\cdots,l)$ 可以取任意的值，而其它的 A_{nm} 和 B_{nm} 可唯一地确定，从而得出例 1 的解，此解含有 $2l+1$ 个固有函数的任意线性组合.

(ii) 恒稳振动.

在有些问题中需在一个有界区域 Ω 中求三维波动方程

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta_3 u+f(M)e^{i\omega t},\ M\in\Omega$$

满足边界条件

$$u|_{\partial\Omega}=\varphi(N)e^{i\omega t}$$

的稳态解

$$u(M,t)=V(M)e^{i\omega t}$$

称这种解为恒稳振动，也称为一个驻波解，它是关于时间变量 t 的周期函数，把此种解代入波动方程和边界条件得 **Helmholtz** 方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 V+k^2V=f(M)\\ V|_{\partial\Omega}=\varphi(N)\end{cases}$$

其中 $k^2=\frac{w^2}{a^2}$，所以求稳态解的问题就是求解 **Helmholtz** 方程的问题，有时就称 **Helmholtz** 方程为波动方程.

有些问题需求在一个区域 Ω 中满足齐次波动方程和齐次边界条件的非零稳态解 $u(M,t)=V(M)e^{i\omega t}$，称之为固有的振动，代入波动方程和边界条件得

$$\begin{cases} \Delta_3 V(M) + \dfrac{w^2}{a^2} V(M) = 0 \\ V|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

所以求这种稳态解的问题也就是求解调和方程关于区域 Ω 的固有值问题.

*3.5.5 其它的一些定解问题

本目将讨论波场绕射，电磁场的极化，完全刚性障阻物对波场的反射和对稳定流场的扰动(绕流)等提出的偏微分方程的定解问题. 另外将讨论 **Schrodinger** 方程的一些最简单的问题.

(i) 波场绕射问题.

波动过程的传播伴随着折射和反射等现象，这种现象的有关问题归结为波动方程的绕射或散射问题.

设 t 为时间，$M=(x, y, z)$ 为空间变量，$u(M, t)$ 为波场的分布，在周期力 $f(M)e^{i\omega t}$ 的作用下，$u(M, t)$ 满足波动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(P\frac{\partial u}{\partial z}\right) + fe^{i\omega t} \quad (25)$$

其中 ρ, P 是介质参数，它们均取正值，一般情况下，它们是空间变量的函数，现在设把整个空间 R^3 分为有限个区域，在每一个区域内介质是均匀的，ρ, P 取常数值，所以在每个区域内方程(25)是标准的波动方程，但不同的区域介质参数不相同，波动方程也不相同.

今需在整个空间求稳态解 $u(M, t) = v(M)e^{i\omega t}$，代入方程(25)得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(P\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \rho w^2 v = -f \quad (26)$$

所以要在整个 R^3 中求解方程(26)，通常也称(26)为波动方程.

设 R^3 中有 n 个互相分开的有界小区域 $\Omega_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 在 Ω_i 中介质参数取常数 P_i 和 ρ_i，设在 Ω_i 内的波场 $v(M)$ 为 $v_i(M)$.

在这 n 个小区域之外余下的无界区域为 Ω_0，在 Ω_0 内介质参数取 P_0 和 ρ_0，波场为 v_0，类似地记在每一个区域 Ω_i 内的外力为 f_i，从而得下列绕射问题

$$\begin{cases} \Delta_3 v_i + k_i^2 v_i = \bar{f}_i \\ v_i|_{\partial\Omega_i} = v_0|_{\partial\Omega_i} \\ P_i \dfrac{\partial v_i}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_i} = P_0 \dfrac{\partial v_0}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_i} \end{cases}$$

其中 $i = 0, 1, 2, \cdots, n$，$k_i^2 = \dfrac{\rho_i}{P_i} w^2$，$\bar{f}_i = \dfrac{-f}{P_i}$.

另外，在无穷远处还要加上 **Sommerfeld** 的外幅射条件：

$$v_0(M) = O(\frac{1}{r})$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} + ik_0 v_0 = 0(\frac{1}{r})$$

对于这种绕射问题已有较完整的数学理论. 例如解是存在和唯一的等. 在实际应用中，通常只在 Ω_0 内有外力的激发，即 $\bar{f}_0 \neq 0$，$\bar{f}_i = 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

绕射问题又常常表现为下列的形式，这时又常称为散射问题. 即设

$$v_0(M) = w_0(M) + \bar{v}_0(M), \quad M \in \Omega_0$$

其中称 $\bar{v}_0(M)$ 为入射波，它是已知的，称 $w_0(M)$ 为反射波. 称在各 $\Omega_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 内的波场 $v_i(M)$ 为折射波，而得下列散射问题模型

$$\begin{cases} \Delta_3 w_0 + k_0^2 w_0 = 0 \\ \Delta_3 v_i + k_i^2 v_i = 0 \\ v_i|_{\partial\Omega_i} = (w_0 + \bar{v}_0)|_{\partial\Omega_i} \\ P_i \dfrac{\partial v_i}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_i} = P_0\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial n} + \dfrac{\partial \bar{v}_0}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial\Omega_i} \end{cases}$$

另外反射波 w_0 在无穷远处应满足幅射条件：

$$w_0(M) = O(\frac{1}{r})$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} + ik_0 w_0 = o(\frac{1}{r})$$

例如关于单个球体的波场散射问题，设

$$\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$$

$$\Omega_0: R^3 - \Omega_1$$

$$\bar{v}_0(M) = \mathrm{e}^{-ik_0 z} \quad (\text{入射波场})$$

利用球坐标和分离变量法求解反射波 $w_0(M)$ 和折射波 $v_1(M)$，根据问题的轴对称性可直接设

$$w_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(k_0 r) P_n(\cos\theta)$$

$$v_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) P_n(\cos\theta)$$

可以证明，由于用第三类 **Bessell** 函数 $H^{(2)}$，$w_0(r, \theta)$ 的外辐射条件成立．再利用联接条件

$$v_1(r, \theta)\big|_{r=r_0} = (w_0(r, \theta) + e^{-ik_0 z})\big|_{r=r_0}$$

$$P_1 \frac{\partial v_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = P_0\left[\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(e^{-ik_0 r\cos\theta})\right]_{r=r_0}$$

可唯一地确定 a_n 和 b_n，从而确定 $w_0(r, \theta)$ 和 $v_1(r, \theta)$．

(ii) 极化问题．

设在空间 R^3 中均为均匀的介电常数为 ε_0 的介质，在此介质内有一个背景电场 $\vec{E}_0 = -\nabla u_0$，$\Delta_3 u_0 = 0$，今放置一个介电常数为 ε_1 的物体 Ω 在此电场中从而产生极化而得到整个空间的电位为

$$u(x, y, z) = \begin{cases} u_0(x, y, z) + w_0(x, y, z), & \text{在 } \Omega \text{ 外} \\ u_0(x, y, z) + v_1(x, y, z), & \text{在 } \Omega \text{ 内} \end{cases}$$

其中 $w_0(x, y, z)$ 和 $v_1(x, y, z)$ 为激化而产生的感应电位，它们应满足下列定解问题

$$
\begin{cases}
\Delta_3 w_0 = 0, \ M \in \Omega \text{ 外} \\
\Delta_3 v_1 = 0, \ M \in \Omega \\
w_0 |_{\partial\Omega} = v_1 |_{\partial\Omega} \\
\varepsilon_0 \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial m} + \dfrac{\partial w_0}{\partial n} \right) \Bigg|_{\partial\Omega} = \varepsilon_1 \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial m} + \dfrac{\partial v_1}{\partial n} \right) \Bigg|_{\partial\Omega}
\end{cases}
$$

另外在无穷远处还要求

$$
w_0 = O\left(\frac{1}{r}\right)
$$

例如，若设 Ω 是一个球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$，则利用球坐标和分离变量法求解，可令

$$
w_0(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta)
$$

$$
v_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} \cos m\varphi + D_{nm} \sin m\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^{n} P_n^m(\cos\theta)
$$

然后利用两个连接条件可确定 A_{nm}，B_{nm}，C_{nm}，D_{nm}.

特别，若设 $u_0(M) = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$，则可令

$$
w_0 = w_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta)
$$

$$
v_1 = v_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{a} \right)^{n} P_n(\cos\theta)
$$

由联接条件可得

$$
w_0 = -E_0 r\cos\theta \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \left(\frac{a}{r} \right)^3
$$

$$
v_1 = -E_0 r\cos\theta \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1}
$$

(iii) 完全刚性障阻物对波场的反射问题.

设 R^3 中有一个入射的波场

$$
u_0(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} \overline{u}_0(x, y, z)
$$

它满足波动方程

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u
$$

即 $\bar{u}_0(x, y, z)$ 满足

$$\Delta_3\bar{u}_0(x, y, z) + k^2\bar{u}_0(x, y, z) = 0$$

其中 $k^2 = \dfrac{w^2}{a^2}$. 今有一固定不动的完全刚性有界物体 Ω 放入此波场中，由于刚体表面的反射而在 Ω 外部产生的恒稳振动为

$$u(x, y, z, t) = e^{iwt}(\bar{u}_0(x, y, z) + w_0(x, y, z))$$

则反射波 $w_0(x, y, z)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 w_0 + k^2 w_0 = 0, (x, y, z) \in \Omega \text{ 之外部} \\ \left.\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\dfrac{\partial \bar{u}_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

另外在无穷远处满足向外幅射条件

$$w_0 = O(\frac{1}{r})$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = 0(\frac{1}{r})$$

如果 Ω 为球域 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$，则用分离变量法和球坐标可令

$$w_0(r, \theta, \varphi) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\frac{1}{\sqrt{r}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)P_n^m(\cos\theta)$$

由边界条件可唯一地确定 A_{nm} 和 B_{nm}.

如果 $\bar{u}_0(r, \theta, \varphi) = \bar{u}_0(r, \theta)$，即和 φ 无关，则反射波也是轴对称，可令

$$w_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) P_n(\cos\theta)$$

例如，若设 $\bar{u}_0(r, \theta) = e^{ikr\cos\theta}$，由于

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-i)^n\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr)P_n(\cos\theta)$$

由边界条件可得

$$w_0(r,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-i)^n \frac{j'_n(kR)}{\xi'_n(kR)}\xi_n(kr)P_n(\cos\theta)$$

其中

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

$$\xi_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

(iv) 绕体对流速场的扰动.

设在 R^3 中有一稳定的流速场 $\vec{v}_0 = -\nabla\varphi_0(x,y,z)$，其中 $\varphi_0(x,y,z)$ 为速度势，今在此流场中放置一绕体 Ω，则绕流后在 Ω 外的速度场的速度势为

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_0(x,y,z) + w_0(x,y,z)$$

其中 $w_0(x,y,z)$ 为扰动的速度势，它满足下列调和方程的外部问题

$$\begin{cases} \Delta_3 w_0(x,y,z) = 0, (x,y,z) \in \Omega\text{外} \\ \left.\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

另外在无穷远处应有

$$w_0 = O(\frac{1}{r})$$

如果 Ω 为球形域，$x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$，则利用球坐标和分离变量法可令

$$w_0(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n^m(\cos\theta)$$

再由边界条件而可唯一地确定 A_{nm}，B_{nm}.

(v) **Schrodinger** 方程的一些简单问题.

在量子力学中为研究在势场内粒子的状态需讨论 **Schrodinger** 方程

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi + U(x,y,z)\psi = 0$$

其中 h 为普郎克常数，μ 为粒子的质量，t 为时间，(x, y, z) 为空间变量，$U(x, y, z)$ 为力场的势能，称 $\psi(x, y, z, t)$ 为波函数. 在量子力学中需求下列稳态解

$$\psi(x, y, z) = \psi^0(x, y, z)\mathrm{e}^{-\frac{E}{h}it}$$

且满足

$$\iiint\limits_{R^3} |\psi^0(x, y, z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1$$

其中 E 表示粒子的能量. 把稳态解代入 **Schrodinger** 方程得下列固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_3\psi^0(x, y, z) + \dfrac{2\mu}{h^2}(E - U)\psi^0 = 0 \\ \iiint\limits_{R^3} |\psi^0| \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1 \end{cases}$$

其中 $\lambda = \frac{2\mu}{h^2}E$ 相当于固有值，由此固有值的全体对应的 E 值的全体构成能量的固有值谱，相应的固有函数 $\psi^0(x, y, z)$ 称为稳定态或约束态. 如果能量的固有值取到一些离散的值 E_n，则称能量量子化了，这些值 E_n 称为能级.

在量子力学中讨论谐振子时可得一维 **Schrodinger** 方程的固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{2\mu}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + (E - U)\psi = 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = 1 \end{cases} \tag{27}$$

其中 $\psi(x)$ 就是稳态解中的 ψ^0，但今后就记为 ψ，而把上述方程就直接称为一维 **Schrodinger** 方程，其中的势函数 $U = U(x) = \frac{\mu}{2}w_0^2x^2$.

引入 $\lambda = \frac{2E}{hw_0}$, $a = \sqrt{\frac{h}{\mu w_0}}$, $\xi = \frac{x}{a}$，则固有值问题(27)变为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 d\xi = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

再作未知函数代换

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} u$$

则得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{d\xi^2} - (2\xi + 1)u + \lambda u = 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} |u|^2 d\xi = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

此为 **Hermite** 方程的固有值问题. 它的固有值 $\lambda = \lambda_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 对应的固有函数为

$$u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{H_n(\xi)}{\sqrt{2^n \cdot n!\sqrt{\pi}}}$$

回到固有值问题(27)得固有的能级

$$E = E_n = hw_0(n + \frac{1}{2})$$

对应的稳定态为

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{a})^2} H_n(\frac{x}{a})}{\sqrt{2^n \cdot n!\sqrt{\pi}}}, \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

在量子力学中的意义是能级 E_n 的粒子在数轴上的位置这一随机变量的分布密度为 $|\psi_n(x)|^2$.

在量子力学中讨论氢元子内的电子在其核产生的库仑场中的运动时可得三维 **Schrodinger** 方程的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta\psi + \dfrac{2\mu}{h^2}(E - U)\psi = 0 \\ \iiint\limits_{R^3} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \end{cases} \tag{28}$$

其中$U=-\dfrac{e^2}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，e是氢元子核所带的电荷.问题是要求固有值E（即固有的能级谱值），和相应的固有函数$\psi(x,y,z)$（即相应的稳定态），且设$E<0$，即固有值为负数.

利用球坐标(r,θ,φ)，则问题(28)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\Delta_{(\theta,\varphi)}\psi+\dfrac{2\mu}{h^2}\left(E+\dfrac{e^2}{r}\right)\psi=0 \\ \int_0^{+\infty} r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}|\psi|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=1 \end{cases}$$

应用分离变量法可直接设

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

则得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left[\dfrac{2\mu}{h^2}\left(E+\dfrac{e^2}{r}\right)-\dfrac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0 \\ \int_0^{+\infty} r^2|R(r)|^2\mathrm{d}r<+\infty \end{cases}$$

为了简单计，不考虑积分归一化条件，而只要求相应的积分收敛.

引入

$$a=\frac{h^2}{\mu e^2},\ E_0=\frac{e^2}{a},\ \varepsilon=\frac{E}{E_0}$$

并作代换

$$\rho=\frac{r}{a},\ y=\sqrt{\rho}R$$

则得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho}+\left(2\varepsilon+\dfrac{2}{\rho}-\dfrac{s^2}{4\rho^2}\right)y=0 \\ \int_0^{+\infty}\rho|y|^2\mathrm{d}\rho<+\infty \end{cases}$$

其中$s=2l+1$.

再作代换 $t = \rho\sqrt{-8\varepsilon}$，得

$$\begin{cases} ty'' + y' - \left(\frac{t}{4} + \frac{s^2}{4t}\right)y + \lambda y = 0 \\ \int_0^{+\infty} t|y|^2 \mathrm{d}t < +\infty \end{cases}$$

其中 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}$. 这是在前面的内容中已讨论了的推广了的 **Laguerre** 方程固有值问题. 其固有值是 $\lambda = n_r + \frac{s+1}{2} = n_r + l + 1$，$n_r = 0, 1, 2, \cdots$，对应的固有函数是

$$t^{\frac{s}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} L_{n_r}^{s}(t)$$

最后回到问题(28)，当固有值 $\lambda = \lambda_n = n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ 时，即 $E = E_n = -\frac{\mu \mathrm{e}^4}{2h^2 n^2}$ 时，除了一个归一化因子外对应的固有函数为

$$t^l \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} L_{n-l-1}^{2l+1}(t) P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$t^l \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} L_{n-l-1}^{2l+1}(t) P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

其中 $l = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$，$m = 0, 1, \cdots, l$. 所以一个固有值 E_n 对应着 $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ 个线性无关的固有函数. 而其中 $t = \frac{2\mathrm{e}^2\mu}{nh^2}r$.

习 题 三

内容包括：分离变量法(1—3)，**Bessell** 函数在分离变量法中的应用(4—5)，**Legendre** 函数和球函数在分离变量法中的应用(6—7).

1. 求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left(u - k_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = 0 \\ \left(u + k_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Delta_2 u = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=b} = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0},\ u|_{x=a} = g(y) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} + cu,\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$

2. 求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u,\ t > 0,\ r < R \\ u|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r) \\ u|_{r=R} = 0 \end{cases}$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x \dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u, \quad t > 0,\ 1 < x < 2 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=1} = 0,\ u|_{x=2} = 0 \end{cases}$

3. 求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \Delta_2 u = 1,\ a < r < b \\ u|_{r=a} = 1 + \cos^2\theta,\ u|_{r=b} = \sin^2\theta \end{cases}$ 其中 (r, θ) 为极坐标.

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = u_0 \\ u|_{x=0} = \sin t,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -\dfrac{q}{k} \end{cases}$

4. 求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left((l - x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0,\ u \text{ 在 } x = l \text{ 附近有界} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u,\ t > 0,\ r < R,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \\ u|_{r=R} = e^t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Delta_2 u - k^2 u = 0 \\ u|_{r=R} = \cos^2\theta \end{cases}$

其中 (r, θ) 为极坐标.

(4) $\begin{cases} \Delta_2 u - k^2 u = 0,\ a < r < b \\ u|_{r=a} = f_1(\theta),\ u|_{r=b} = f_2(\theta) \end{cases}$ 其中 (r, θ) 为极坐标.

(5) $\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ a < r < b,\ 0 < z < l,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ u|_{z=0} = 0,\ u|_{z=l} = f(r) \\ u|_{r=a} = 0,\ u|_{r=b} = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 u,\ t>0,\ r<R \\ u|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(r)\cos\theta \\ u|_{r=R}=0 \end{cases}$

其中 (r, θ) 为极坐标.

5. 设 (r, θ, z) 为柱坐标.

(1)求 $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ 分离变量的解族 $R(r)\Theta(\theta)Z(z)$.

(2)求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u$ 分离变量的解族 $e^{i\omega t}R(r)\Theta(\theta)Z(z)$.

6. 设 (r, θ, φ) 为球坐标，求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ r<R \\ u|_{r=R} = \sin^2\theta\cos^2\varphi \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ r>R \\ u|_{r=R} = \sin^2\theta\cos^2\varphi,\ \lim\limits_{r\to\infty} u = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ r>R \\ u|_{r=R} = f(\theta),\ \lim\limits_{r\to\infty} u = 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ r<R \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \sin^2\theta\cos^2\varphi - \dfrac{1}{3} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \Delta_3 u - k^2 u = 0,\ r<R \\ u|_{r=R} = \sin^2\theta\cos^2\varphi \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_3 u,\ t>0,\ r<R \\ u|_{t=0} = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi \\ u|_{r=R} = 0 \end{cases}$

7. 设 (r, θ, φ) 为球坐标

(1)求 $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ 分离变量的解族.

(2)求 $\Delta_3 u - k^2 u = 0$ 分离变量的解族.

(3)设 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta_3 u = 0$，求分离变量的解族 $e^{i\omega t}R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$.

4 积分变换法，广义函数和方程的基本解

4.1 积分变换法

4.1.1 基本的积分关系式和共轭微分算子

在求解和研究偏微分方程的问题中，分部积分公式起着十分重要的作用. 最基本的分部积分公式是

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x + \oint_{\partial\Omega} v(y)u(x)\cos\alpha_i(x)\mathrm{d}s \tag{1}$$

其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\mathrm{d}x = dx_1\cdot\mathrm{d}x_2\cdot\cdots\mathrm{d}x_n$, Ω 是 R^n 中的一个区域，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，α_i 是边界上的外法向和 x_i 轴的夹角. 此公式中关键的一点是因为有微分恒等式

$$v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} + u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(u(x)v(x))$$

即右端的微分式等于一个散度式，从而两边积分即得积分关系式(1). 当 $n=1$ 时，(1)式就是一元函数的分部积分公式，$n=2$ 时(1)式是 Green 公式，$n=3$ 时(1)式为 Gauss 公式. 可以一般地称(1)为 Stoks 公式. 分部积分公式把关于函数 $u(x)$ 的导数转移到关于 $v(x)$ 的导数.

基于积分公式(1)可引入共轭微分算子和共轭微分方程的概念. 设二阶线性微分算子

$$L[u]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u$$

不妨设 $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$．又设

$$L^*[v]=\sum_i\sum_j\frac{\partial}{\partial x_i\partial x_j}(a_{ij}(x)v(x))-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x)v)+c(x)v$$

则称 L^* 是 L 的共轭微分算子，不难验证，L 也是 L^* 的共轭微分算子，即 L 和 L^* 是互为共轭的，称 $L^*[v(x)]=g(x)$ 是 $L[u(x)]=f(x)$ 的共轭微分方程．如果 $L^*=L$ 时，则称 $L=f(x)$ 是自共轭的微分方程．例如：

二阶线性常微分算子

$$L[u(x)]=a_2(x)u''(x)+a_1(x)u'(x)+a_0(x)u$$

则

$$L^*(v(x))=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(a_2(x)v(x))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_1(x)v(x))+a_0(x)v(x)$$

如果 $a_1(x)=a'_2(x)$，则成为自共轭算子

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_2(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+a_0(x)u$$

n 维 Laplace 算子 $\Delta_n=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 是自共轭的．

n 维波动算子 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_n$ 是自共轭的．

n 维热传导算子 $\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta_n$ 是非自共轭的，它的共轭算子是 $-\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta_n$．

互为共轭的二阶线性微分算子 L 和 L^* 有下列微分恒等式

$$v(x)L[u(x)]-u(x)L^*[v(x)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\tag{2}$$

其中

$$P_i=\sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}(x)v(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}-u\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)v(x))\right]+b_i(x)uv$$

即 $vL[u]-uL^*[v]$ 是一个散度式，各 P_i 只是 u，v 和 u，v 的一

阶偏导数的双线性微分式.

根据微分恒等式(2)两边积分得基本的积分关系式

$$\int_{\Omega}[vL[u]-uL^{*}[v]]\mathrm{d}x=\oint_{\partial\Omega}\sum_{i}P_{i}\cos\alpha_{i}(x)\mathrm{d}s \tag{3}$$

此公式是基本的分部积分公式(1)的推广，它在二阶线性偏微分方程问题的讨论中起着重要的作用.

如果 $u(x)$，$v(x)$ 在 Ω 的边界上满足适当的齐次边界条件使积分关系式(3)右端沿着 $\partial\Omega$ 的积分为零，则有

$$\int_{\Omega}vL[u]\mathrm{d}x=\int_{\Omega}uL^{*}[v]\mathrm{d}x$$

如果 $u(x)$，$v(x)$ 分别满足微分方程

$$L[u(x)]=f(x),\ L^{*}[v(x)]=g(x)$$

则有

$$\int_{\Omega}(vf-ug)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}P_{i}\cos\alpha_{i}\mathrm{d}s$$

在一定条件下，基本积分关系式(3)中的区域 Ω 也可以是无界的，这时 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是一无限延伸的曲面或曲线.

4.1.2 积分变换

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数，$K(x, \lambda)$ 是定义在 $[a, b]\times A$ 上的二元函数，即 $K(x, \lambda)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的含变量 λ 的函数族，其中 $\lambda\in A$，A 是数的某一集合，它可以是一个区间，也可以是一个数列，也可以是复平面上的一个区域，则称

$$\hat{f}(\lambda)=\int_{a}^{b}K(x, \lambda)f(x)\mathrm{d}x,\quad \lambda\in A$$

为 $f(x)$ 的积分变换、称 $K(x, \lambda)$ 为积分变换的核函数，称 $\hat{f}(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的象函数，称 $f(x)$ 为 $\hat{f}(\lambda)$ 的原函数.

一般原函数 $f(x)$ 是在某一个函数空间 M 中变化，相应的象

函数 $\hat{f}$ 为另一函数空间 M' 中的元素，所以一个积分变换决定了一个从 M 到 M' 中的一个映射 K

$$M \rightarrow M'$$

$$K: f(x) \rightarrow K[f(x)] = \hat{f}(\lambda)$$

重要的是需要这个映射存在唯一的逆映射，即反变换 K^{-1}，直观地讲，需要积分变换的函数族 $K(x, \lambda)$ 具有某种完备性，使得可以由象函数来唯一地确定原函数．下面列出一些重要的积分变换及其反变换的公式

Fourier 变换 FT

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} \mathrm{d}x = F[f(x)], \quad \lambda \in R^1$$

反变换的公式为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \mathrm{d}\lambda = F^{-1}[\hat{f}(\lambda)]$$

Fourrer 正弦变换 F_sT

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} f(x) \sin\lambda x \mathrm{d}x = F_s[f(x)] \quad \lambda \geqslant 0$$

反变换的公式为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \sin\lambda x \mathrm{d}\lambda = F_s^{-1}[\hat{f}(x)]$$

Fourier 余弦变换 F_cT

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos\lambda x \mathrm{d}x = F_c[f(x)] \quad \lambda \geqslant 0$$

反变换的公式为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \cos\lambda x \mathrm{d}\lambda = F_c^{-1}[\hat{f}(x)]$$

Laplace 变换 LT

$$\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = L[f(t)], \quad \mathrm{Re}\,p \geqslant \sigma_0$$

反变换公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{f}(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = L^{-1}[\hat{f}(p)]$$

Mellin 变换 MT

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x = M[f(x)], \quad \mathrm{Re}\,s \geqslant \sigma_0$$

反变换公式为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{f}(s)x^{-s}\mathrm{d}s = M^{-1}[\hat{f}(s)]$$

γ 阶 Hankel 变换 $H_\gamma T$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} xJ_\gamma(\lambda x)f(x)\mathrm{d}x = H_\gamma[f(x)], \quad \lambda \geqslant 0$$

反变换公式为

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \lambda J_\gamma(\lambda x)\hat{f}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = H_\gamma^{-1}[\hat{f}(\lambda)]$$

有限 Fourier 变换 IFT

$$a_n = \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \ n = 0, 1, \cdots$$

$$b_n = \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

反变换公式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

有限 Fourier 余弦变换 IF_cT

$$a_n = \int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \ n = 0, 1, \cdots$$

反变换公式为

$$f(x)=\frac{a_0}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

有限 Fourier 正弦变换 IF_sT

$$b_n=\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots$$

反变换公式为

$$f(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

有限的 Hankel 变换 $IH_\gamma T$

$$a_n=\int_0^a xf(x)J_\gamma(w_nx)\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots$$

其中 w_n 是 $J_\gamma(wa)=0$ 的第 n 个正根，反变换的公式为

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{[J'_\gamma(aw_n)]^2}J_\gamma(w_nx)$$

上述积分变换及其各种性质有专门的著作加以讨论，有专门的积分表可以查阅，尤其这些积分变换把微分运算变为简单的代数运算的性质使得它们在微分方程的应用中具有基本的意义，将在具体问题的讨论中加以分析介绍.

积分变换的概念和上述一元函数的积分变换可以推广到多元函数的情况. n 元函数的 Fourier 变换为

$$F[f(x)]=\hat{f}(\lambda)=\int_{R^n}f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda\cdot x}\mathrm{d}x,\ \lambda\in R^n$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，$\lambda\cdot x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$. 它的反演公式为

$$F^{-1}[\hat{f}(x)]=f(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\hat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda\cdot x}\mathrm{d}\lambda$$

利用分部积分公式，它也具有把微分运算变为代数运算的性质

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\right]=i\lambda_k\hat{f}(\lambda)$$

二维 Laplace 变换为

$$\hat{f}(p_1, p_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t_1, t_2)e^{-(p_1t_1+p_2t_2)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2, \ \mathrm{Re}p_1 \geqslant \sigma_1, \ \mathrm{Re}p_2 \geqslant \sigma_2$$

它的反演公式为

$$f(t_1, t_2) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\hat{f}(p_1, p_2)\mathrm{e}^{(p_1t_1+p_2t_2)}\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2$$

*4.1.3 应用积分变换解偏微分方程的一般原理

应用积分变换来求解偏微分方程问题时，目的是使原函数空间中的微分运算转变为在象函数空间中的较为简单的运算，把原偏微分方程的问题转化为自变量较少的微分方程问题或代数方程问题，在象空间求得解后再由反演公式得出原问题的解. 根据具体的问题来构造或选取一个积分变换就是要决定核函数. 为简单计，以两个自变量二阶线性双曲型方程的混合问题或初值问题加以分析. 设

$$\begin{cases} a_2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_0(x)u \\ \qquad = b_2(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} + b_0(t)u, \ t > 0, \ a < x < b \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=a} = \mu_1(t), \ u|_{x=b} = \mu_2(t) \end{cases}$$

其中 $a_2(x) > 0$, $b_2(t) > 0$，如果 (a, b) 为 $(-\infty, \infty)$ 则成初值问题. 设方程中左端的微分算子为 L_1. 它只含对于自变量 x 的导数. 右端的微分算子为 L_2，它只含对自变量 t 的导数.

设相对于自变量 x 对未知函数 $u(x, t)$ 和相关的函数作积分变换，$K(x, \lambda)$ 为积分变换的核函数，即在方程中乘上 $K(x, \lambda)$ 然后由 a 到 b 积分，对相关函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也这样做得

$$\int_a^b K(x,t)L_1[u(x,t)]\mathrm{d}x = \int_a^b K(x,t)L_2[u(x,t)]\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u(x,0)K(x,\lambda)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)K(x,\lambda)\mathrm{d}x = \hat{\varphi}(\lambda)$$

$$\int_a^b \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}K(x,\lambda)\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)K(x,\lambda)\mathrm{d}x = \hat{\psi}(\lambda)$$

根据分部积分公式得

$$\begin{cases} \int_a^b u(x,t)L_1^*[K(x,\lambda)]\mathrm{d}x + p(x,\lambda)|_a^b = L_2[\hat{u}(\lambda,t)] \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\varphi}(\lambda) \\ \dfrac{\partial \hat{u}(\lambda,0)}{\partial t} = \hat{\psi} \end{cases}$$

其中

$$p(x,\lambda) = a_2(x)K(x,\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial x}(a_2(x)K(x,\lambda)) + a_1(x)Ku$$

选取 $K(x,\lambda)$ 满足

$$L_1^*[K(x,\lambda)] = g(\lambda)(K(x,\lambda))$$

且在边界 $x=a$ 和 $x=b$ 满足适当的边界条件，使 $p(x,\lambda)|_a^b$ 可以根据 $u(x,t)$ 和 $K(x,\lambda)$ 边界条件确定，已知函数 $f(\lambda,t)$ ，从而得关于 $\hat{u}(\lambda,t)$ 的常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} L_2[\hat{u}(\lambda,t)] = g(\lambda)\hat{u}(\lambda,t) + f(\lambda,t) \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\varphi}(\lambda) \\ \dfrac{\partial \hat{u}(\lambda,0)}{\partial t} = \hat{\varphi}(\lambda) \end{cases}$$

由此确定 $\hat{u}(\lambda,t)$ ，然后由反演公式求出

$$u(x,t) = K^{-1}[\hat{u}(\lambda,t)]$$

特别，对于有界的区间 $[a,b]$ ，若选 $K(x,\lambda)$ 满足

$$\begin{cases} L_1^*[K(x,\lambda)] = g(\lambda)K(x,\lambda) \\ K(x,\lambda)|_{x=a} = 0,\ K(x,\lambda)|_{x=b} = 0 \end{cases}$$

则成常微分方程的固有值问题. 由此确定参数 λ 的取值范围和核函数 $K(x, \lambda)$.

从上面的分析可知，积分变换实质上就是根据分部积分公式把微分运算 $L_1[u(x, t)]$ 转移到对核函数 $K(x, \lambda)$ 的微分运算 $L_1^*[K(x, \lambda)]$，如果选取 $K(x, \lambda)$ 满足 $L_1^*[K(x, \lambda)] = g(\lambda)K(x, \lambda)$，则原函数空间中微分运算就转化为象函数空间中的代数运算，通常 $g(\lambda)$ 是 λ 的代数多项式. 另外还要注意核函数 $K(x, \lambda)$ 边界条件的选取，使得由 $u(x, t)$ 和 $K(x, \lambda)$ 的边界条件能确定出 $p(x, \lambda)|_a^b$.

如果要相对于自变量 t 作未知函数和相关函数的积分变换，其分析的方法是类似的.

4.1.4 用积分变换法求解的一些典型问题

问题一 热传导方程的初值问题.

设 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, x \in R^1 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

相对于自变量 x 作未知函数和相关函数的 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}(\lambda, t)}{dt} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda, t) \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda) \end{cases}$$

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

由于

$$F^{-1}[\hat{\varphi}(\lambda)] = \varphi(x)$$

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = U(x, t)$$

根据 Fourier 变换的折积定理得

$$u(x, t) = \varphi(x) * U(x, t)$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

称此公式为 Poisson 公式.

上述的推导过程只是分析过程，在古典的意义下并不知道 $\varphi(x)$，$u(x, t)$ 是否可以进行 Fourier 变换，所以还要进行综合工作，验证所得的形式解，给出问题的古典解，同时还要讨论解的唯一性和稳定性.

首先从 Poisson 公式可知，只要 $\varphi(x)$ 连续，且当 $|x| \to \infty$ 时 $|\varphi(x)|$ 增长不是很快，例如不超过指数函数 $e^{|x|}$，则当 $t > 0$ 时，所得的 $u(x, t)$ 是无穷次连续可微的，它给出方程的古典解. 另外这时也可以证明 $u(x, t)$ 满足初始条件，所以在此条件下 Poisson 公式给出问题的古典解. 另外在假设当 $|x| \to \infty$ 时解的增长也不超过指数函数的条件下，也可以证明解是唯一的，这时 Poisson 公式给出问题唯一的解，而问题的稳定性可以由解的公式直接证明.

当 $\varphi(x)$ 只是分段连续，有一些第一类的间断点，但 $|\varphi(x)| \leqslant M$ 时，则从 Poisson 公式中可以知道，这时当 $t > 0$ 时，$u(x, t)$ 仍然是无穷次连续可微的，这又一次表明热传导方程解的光滑性和波动方程有本质的不同，且当 $t \geqslant 0$ 时，

$$|u(x, t)| \leqslant M\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi = M$$

即 $|u(x, t)|$ 也是有界的，且其界仍为 M. 当然这时泊松公式只给出问题的广义解，在 $\varphi(x)$ 有第一类间断点处初始条件得不到满足.

对于非齐次热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),\ t > 0,\ x \in R^1 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

应用齐次化原理立即可得

$$u(x,t)=\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi$$

如果应用 n 维的 Fourier 变换，则可得 n 维热传导方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta_n u,\ t>0,\ x\in R^n \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$$

解的 Poisson 公式

$$u(x,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{R^n}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

问题二　波动方程的初值问题.

设$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_n u,\ t>0,\ x\in R^n \\ u|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

此问题的解在第二章中已解决了，$n=1$ 时可以用 D′Alembert 公式给出问题的解，$n=2,3$ 时由 Poisson 公式给出问题的解，对于一般的 n 也可得出解的积分表达式. 现在用 Fourier 变换来求解，方法更为统一，但作反变换时将遇到较大的困难.

相对于空间变量 x 作未知函数和相关函数的 n 元 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}t^2}=-a^2\rho^2\hat{u} \\ \hat{u}|_{t=0}=0 \\ \left.\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=\hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T$，$\rho^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2++\cdots+\lambda_n^2$，所以得

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\psi}(\lambda)\frac{\sin a\rho t}{a\rho}$$

若设

$$F^{-1}\left[\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right]=U(x,t)$$

则根据 n 元 Fourier 变换的折积定理得

$$u(x,t)=\int_{R^n}\psi(\xi)U(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi$$

但是由于维数的不同，$\frac{\sin a\rho t}{a\rho}$ 的原函数就有很大的差别，而且当 $n \geqslant 3$ 时，在古典的意义下反演公式的积分是发散的，这种问题又激发人们去创造新的数学理论加以克服，这就是广义函数的理论和发散积分的理论，在下一节中将介绍这种理论，使得 Fourier 变换和逆变换及其它的微积分的运算均可畅通地进行.

当 $n=1$ 时

$$F^{-1}\left(\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right)=U(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & |x_1|<at\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以

$$u(x_1,t)=\psi(x_1)*U(x_1,t)=\frac{1}{2a}\int_{x_1-at}^{x_1+at}\psi(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1$$

这就是 D′ Alembert 公式.

当 $n=2$ 时

$$F^{-1}\left(\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right)=U(x_1,x_2,t)=$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2\pi a}\frac{1}{\sqrt{(at)^2-x_1^2-x_2^2}}, & x_1^2+x_2^2<a^2t^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以

$$(x_1,x_2,t)=\psi(x_1,x_2)*U(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_x^{at}}\frac{\psi(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

其中 $r^2=(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2$，$D_x^{at}$ 表示以 $(x_1,x_2)^T$ 为中心 at

为半径的圆域，这就是 Poisson 公式.

当 $n \geqslant 3$ 时. $U(x, t)$ 是奇异的广义函数，其意义将在下一节中介绍. 例如：

$$n = 3 \text{ 时}, \quad F^{-1}\left(\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\delta(r - at) = U(x, t)$$

其中 δ 表示广义函数中的脉冲函数，$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. 根据广义函数的运算也可得出 Poisson 公式

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = tM_x^{at}[\psi] = \psi(x) * U(x, t)$$

对于更大的 n 对，$U(x, t)$ 将是具有更高奇异性的广义函数，例如 $n = 5$ 时，

$$F^{-1}\left(\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right) = U(x, t) = \frac{-1}{2^3\pi^2 a}\left[\frac{\delta'(r - at)}{(at)^2} + \frac{\delta(r - at)}{(at)^3}\right]$$

根据广义函数的运算也可求得5维波动方程初值问题的解

$$u(x, t) = \psi(x) * U(x, t)$$

问题三　半空间调和方程的边值问题.

先讨论半平面二维调和方程的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ y > 0, \ x \in R^1 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

相对于自变量 x 对未知函数和相关的函数作 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}(\lambda, y)}{\mathrm{d}y} - \lambda^2\hat{u}(\lambda, y) = 0 \\ \hat{u}|_{\lambda, 0} = \hat{f}(\lambda) \end{cases}$$

若要使当 $y \to +\infty$ 时 $\hat{u}(\lambda, y)$ 有界，得

$$\hat{u}(\lambda, y) = \hat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda| y}$$

由于

$$F^{-1}(\mathrm{e}^{-|\lambda| y}) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} = U(x, y)$$

所以

$$u(x, y) = f(x) * U(x, y)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \mathrm{d}\xi$$

对于半空间三维调和方程的边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, z > 0, (x, y) \in R^2$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

相对于自变量 (x, y) 作未知函数和相关函数的 Fourier 变换，则得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{u}^2(\lambda_1, \lambda_2, z)}{\mathrm{d}z^2} - \rho^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\lambda_1, \lambda_2, 0) = \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) \end{cases}$$

若要使当 $z \to +\infty$ 时，$\hat{u}(\lambda_1, \lambda_2, z)$ 有界，则有

$$\hat{u}(\lambda_1, \lambda_2, z) = \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) \mathrm{e}^{-z\rho}$$

其中 $\rho = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1^2}$，由于

$$F^{-1}(\mathrm{e}^{-z\rho}) = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = U(x, y, z)$$

所以

$$u(x, y, z) = f(x, y) * U(x, y, z)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{f(\xi, \eta) z}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z)^{3/2}} \mathrm{d}\xi s \eta$$

对于半空间 n 维调和方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_n u = 0, x_n > 0, (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in R^{n-1} \\ u(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

相对于自变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 作 $(n-1)$ 元 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \hat{u}(\lambda, x_n)}{\mathrm{d}x_n^2} - \rho^2 \hat{u}(\lambda, x_n) = 0 \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda) \end{cases}$$

其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1})^T$，$\rho^2=\lambda_1^2+\cdots+\lambda_{n-1}^2$．得

$$\hat{u}(\lambda,x_n)=\hat{f}(\lambda)e^{-\rho x_n}$$

由于

$$F^{-1}(e^{-\rho x_n})=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{x_n}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{n/2}}=U(x_1\cdots x_{n-1},x_n)$$

所以

$$x_1\cdots x_n)=f(x_1,\cdots,x_{n-1})*U(x_1\cdots x_{n-1},x_n)$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}}\int\limits_{R^{n-1}}\frac{x_nf(\xi_1\cdots\xi_{n-1})}{((x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_{n-1}-\xi_{n-1})^2+x_n^2)^{n/2}}d\xi$$

问题四　半无界区间一维热传导方程的混合问题．

$$设\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},\ x>0,\ t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ u|_{x=0}=g(t)\end{cases}$$

由于 Fourier 正弦变换有下列性质：

$$F_s[f''(x)]=-\lambda^2F_s[f(x)]+\lambda f(0)$$

所以上述混合问题应用相对于自变量 x 作未知函数和相关函数的 Fourier 正弦变换得

$$\begin{cases}\dfrac{d\hat{u}(\lambda,t)}{dt}=-a^2\lambda^2\hat{u}+a^2\lambda g(t)\\ \hat{u}|_{t=0}=\hat{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

所以

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}+a^2\lambda\int_0^t g(\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\tau$$

由反演公式得

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda x d\lambda$$

$$+\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^{+\infty}\lambda \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^t \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x\sin\lambda\xi\mathrm{d}\lambda$$

$$+\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^{+\infty}\lambda \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

$$=\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\mathrm{d}\xi$$

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t g(\tau)\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau$$

这里直接利用了积分公式 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}}$.

另一种解法是根据叠加原理，可令

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$$

其中 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 分别满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\\ u_1|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_1|_{x=0}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{\partial u_2}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\\ u_2|_{t=0}=0\\ u_2|_{x=0}=g(t)\end{cases}$$

对于 $u_1(x,t)$ 可应用相对于自变量 x 对未知函数和相关函数作 Fourier 正弦变换得出，也可以利用延拓法把 $\varphi(x)$ 奇延拓到 $(-\infty,\infty)$ 上，然后直接应用初值问题解的 Poisson 公式得出. 对于 $u_2(x,t)$ 可应用相对于自变量 t 作未知函数和相关函数的 Laplace 变换得

$$\begin{cases}a^2\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}_2(x,p)}{\mathrm{d}x^2}=p\hat{u}_2(x,p)\\ \hat{u}_2(x,p)|_{x=0}=\hat{g}(p)\end{cases}$$

考虑到当 $p \to \infty$，$\mathrm{Re}p \geqslant \sigma_0 > 0$ 时，作为古典意义下的 Laplace 变换 $\hat{u}$ 应该趋于零，所以取

$$\hat{u}_2(x, p) = \hat{g}(p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}}$$

由于

$$L^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}}\right] = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}\, t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = U(x, t)$$

根据 Laplace 变换的折积定理得

$$u_2(x, t) = g(t) * \frac{x}{2a\sqrt{\pi}\, t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$$= \int_0^t g(\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau$$

对于第二类边界条件下一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_{|t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = g(t) \end{cases}$$

处理的方法是类似的. 由于 $F_c[f''(x)] = -\lambda^2 F_c[f(x)] - f'(0)$，所以直接的方法是相对于自变量 x 对未知函数和相关函数作 Fourier 余弦变换，使偏微分方程的问题变为常微分方程的初值问题，求解常微微分方程后由反演公式得原问题的解. 另一种方法是根据叠加原理把问题分解成两个较简单的问题，其一用 Fourier 余弦变换法或用把 $\varphi(x)$ 偶延拓直接应用 Poisson 公式得出解，另一个问题用 Laplace 变换方法求解.

对于第三类边界条件下一维热传导方程的混合问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_1|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\bigg|_{x=0} = 0$$

要应用相对于自变量 x 作相关函数的积分变换求解，显然这时用 Fourier 正弦变换或余弦变换是不可行的，可以想到这时积分变换的核函数应该是既有正弦函数又有余弦函数，为此根据积分变换的一般原理，选取核函数 $K(x, \lambda)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda^2 K \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} - hK\right)\bigg|_{x=0} = 0,\ x \to +\infty \text{ 时 } K(x, \lambda) \text{ 有界} \end{cases}$$

由此可得

$$K(x, \lambda) = \frac{h\sin\lambda x + \lambda\cos\lambda x}{\sqrt{h^2 + \lambda^2}},\ \lambda \geqslant 0$$

当 $h = 0$ 时得余弦变换，相应于第二类边界条件，当 $h \to \infty$ 时得正弦变换，相应于第一类边界条件．这样可得较为一般的积分变换

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)K(x, \lambda)\mathrm{d}x,\ \lambda \geqslant 0$$

可以证明反变换公式为

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(\lambda)K(x, \lambda)\mathrm{d}\lambda$$

当用此积分变换解所列混合问题得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{u}(\lambda, t)}{\mathrm{d}t} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda, t) \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi} \end{cases}$$

得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}$$

根据反演公式得

$$\hat{u}(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}K(x, \lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}K(\xi, \lambda)K(x, \lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \int_0^{+\infty}\varphi(\xi)U(\xi, x, t)\mathrm{d}\xi$$

其中

$$U(\xi, x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}K(\xi, \lambda)K(x, \lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\mathrm{d}\lambda$$

对于半无界区间一维波动方程混合问题可完全类似地用积分变换来求解．但是这时用通解法(即行波法)更为直接和简单．

问题五　有界区间一维热传导方程的混合问题．

设$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, 0 < x < l \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = g_1(t), u|_{x=l} = g_2(t) \end{cases}$

由于有限的 Fourier 正弦变换有下列性质

$$\int_0^l f''(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$+\frac{n\pi}{l}(f(0) - (-1)^n f(l))$$

所以相对于自变量 x 对相关函数作有限 Fourier 正弦变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t} = -a^2\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 u_n(t) + a^2\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)(g_1(t) - (-1)^n g_2(t)) \\ u_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

其中

$$u_n(t) = \int_0^l u(x, t)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

由常微分方程初值问题解得 $u_n(t)$，再根据反演公式得出原问题

的解

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

这里进行的积分变换和分离变量解法实质上是相通的，积分变换的核函数族 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 是由分离变量时的固有函数系所确定的. 但是积分变换处理的格式更为统一，它不需要把边界条件齐次化即可进行.

对于第二边界条件下的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ 0<x<l\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=g_1(t),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=g_2(t)\end{cases}$$

类似地可用相对于自变量 x 的相关函数作有限的 Fourier 余弦变量来处理. 积分变换的核为 $\cos\frac{n\pi}{l}x,\ n=0,1,\cdots$.

对于其它边界条件下的混合问题，用积分变换求解的方法是完全类似的，变换的核由相应的固有值问题的固有函数系确定.

由于 Laplace 变换有下列性质

$$L[f'(t)]=pL[f(t)]-f(0)$$

这里的有界区间的混合问题也可相对于自变量 t 对相关函数作 Laplace 变换来求解，例如，第一类边界条件下的混合问题可得

$$\begin{cases}p\hat{u}(x,p)-\varphi(x)=a^2\dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}(x,p)}{\mathrm{d}x^2}\\ \hat{u}|_{x=0}=\hat{g}_1(p),\ \hat{u}|_{x=l}=\hat{g}_2(p)\end{cases}$$

由此求得 $\hat{u}(x,p)$，应用反演公式得

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\hat{u}(x,p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

通常利用留数来计算 $u(x,t)$，即

$$u(x, t) = \sum_i \underset{P_i}{\mathrm{Res}}[\hat{u}(x, p)e^{pt}]$$

问题六 应用 $H_\gamma T$ 解题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\gamma^2}{r^2}u\right), \; t > 0, \gamma > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r) \end{cases}$$

由于 $H_\gamma T$ 的核函数是 $K(x, \lambda) = xJ_\gamma(\lambda x)$，不难证明 $H_\gamma T$ 具有下列性质

$$H_\gamma\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} - \frac{\gamma^2}{x^2}f\right] = -\lambda^2 H_\gamma[f(x)]$$

也就是说 $H_\gamma T$ 把上述二阶微分算子 L 确定的微分运算变为简单的代数运算，为证明这一点，根据分部积分公式只需证明 $K(x, \lambda)$ 满足

$$L^*[K(x, \lambda)] = -\lambda^2 K(x, \lambda)$$

即

$$\frac{d^2 K}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}K\right) - \frac{\gamma^2}{x^2}K + \lambda^2 K = 0$$

作变换 $K(x, \lambda) = xY(x, \lambda)$，则

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dY}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \gamma^2)Y = 0$$

所以 Y 有一个解 $J_\gamma(\lambda x)$. 所以 $xJ_\gamma(\lambda x) = K(x, \lambda)$ 必满足

$$L^*(K(x, \lambda)) = -\lambda^2 K(x, \lambda)$$

所以，所列初值问题应用相对于自变量 r 对相关函数作 $H_\gamma T$ 得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \hat{u}(\lambda, t)}{dt^2} = -a^2\lambda^2\hat{u}(\lambda, t) \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}(\lambda), \; \dfrac{d\hat{\varphi}}{dt}\Big|_{t=0} = \hat{\psi}(\lambda) \end{cases}$$

解得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \frac{\sin a\lambda t}{a\lambda} \cdot \hat{\psi}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda} \cdot \hat{\varphi}(\lambda)\right)$$

应用 $H_\gamma^{-1}T$ 得

$$
\begin{aligned}
u(r, t) &= \int_0^{+\infty} \lambda J_\gamma(\lambda r)\hat{u}(\lambda, t)\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \int_0^{+\infty} J_\gamma(\lambda\xi)J_\gamma(\lambda r)\sin a\lambda t\mathrm{d}\lambda \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\xi\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty} J_\gamma(\lambda r)J_\gamma(\lambda\xi)\sin a\lambda t\mathrm{d}\lambda\right]
\end{aligned}
$$

问题七　应用有限 Hankel 变换解题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\gamma^2}{r^2}u\right), & t > 0,\ 0 < r < r_0 \\
u|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(r) \\
u|_{r=r_0} = g(t)
\end{cases}
$$

相对于自变量 r 对相关函数作有限的 Hankel 变换，即积分变换的核是 $rJ_\gamma(w_k r)$，$k = 1, 2, \cdots$，w_k 是 $J_\gamma(wr_0) = 0$ 的第 k 个正零点，根据分部积分公式可得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 u_k(t)}{\mathrm{d}t^2} = a^2(-w_k^2 u_k - g(t)r_0 w_k J'_\gamma(w_k r_0)) \\
u_k(0) = 0,\ u'_k(0) = \psi_k
\end{cases}
$$

其中

$$
u_k(t) = \int_0^{r_0} rJ_\gamma(w_k r)u(r, t)\mathrm{d}r
$$

$$
\psi_k(t) = \int_0^{r_0} rJ_\gamma(w_k r)\psi(r)\mathrm{d}r
$$

解得 $u_k(t)$，则由反演公式得

$$
u(r, t) = \frac{2}{r_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(t)}{(J'_\gamma(w_k r_0))^2}J_\gamma(w_k r)
$$

问题八　应用 Mellin 变换解题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad r > 0,\ -\alpha < \theta < \alpha \\ u|_{\theta=\alpha} = f(r),\ u|_{\theta=-\alpha} = g(r) \end{cases}$$

因为 Mellin 变换为

$$M[f(x)] = \int_0^\infty f(x)\cdot x^{s-1}\mathrm{d}x = \hat{f}(s),\ \mathrm{Re}s \geqslant \sigma_0$$

应用分部积分可得

$$M\,[xf'(x)] = -s\hat{f}(s)$$

$$M\,[x^2 f''(x)] = s^2\hat{f}(s) + s\hat{f}(s)$$

$$M\,[x^2 f''(x) + xf'(x)] = s^2\hat{f}(s)$$

所以在所列边值问题中，相对于自变量 r 作相关函数的 Mellin 变换可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}(s,\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} + s^2\hat{u}(s,\theta) = 0 \\ \hat{u}|_{\theta=\alpha} = \hat{f}(s),\ \hat{u}|_{\theta=-\alpha} = \hat{g}(s) \end{cases}$$

得

$$\hat{u}(s,\theta) = \hat{f}(s)\frac{\sin s(\alpha+\theta)}{\sin 2s\alpha} + \hat{g}(s)\frac{\sin s(\alpha-\theta)}{\sin 2s\alpha}$$

由反演公式得

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\hat{f}(s)\frac{\sin s(\alpha+\theta)}{\sin 2s\alpha} + \hat{g}(s)\frac{\sin s(\alpha-\theta)}{\sin 2s\alpha}\right]r^{-s}\mathrm{d}s$$

4.2 广义函数

4.2.1 **广义函数的引入，Diracδ-函数**

广义函数是普通函数某种意义下的推广，从数学上看是为了使关于函数的许多分析运算可以顺利的进行而引入的. 例如在普

通函数的范围内连续函数的导函数没有意义，许多初等函数的 Fourier 变换不存在，许多含参变量的积分是发散的，从而也不能积分号下求导数等等. 但是如果引入广义函数的概念后可使一个连续函数存在任何阶的导函数，一个发散的含参变量的积分可确定一个参变量的函数，而且还可以积分号下求导数，使得像 x^n，$\sin x$ 这样的函数也存在唯一的 Fourier 变换，总之广义函数的引入不仅有效地扩大了普通函数的概念，而且扩大了普通函数的运算.

数学上引入广义函数的方式有好几种，现在较为通行的方式是把广义函数定义为某一个函数空间上的线性连续泛函，表面上看这种定义和普通函数的概念相差较远，但进一步的研究表明，这种定义更集中反应了广义函数的本质，更便于引入广义函数的运算和有关的概念，而且也可建立起广义函数和普通函数间直接的联系，另外许多问题是通过广义函数使中间的各种运算过程变得十分的简单灵活，而最后解答的结果得出的仍是一个普通的函数.

从历史上看广义函数是由于在力学、物理学中为描述一些集中量的分布密度而引入的，这样使得集中量的离散型的分布和通常的连续型的分布可以统一处理，最简单和最重要的是 Diracδ-函数. 设单位质量集中地分布在数轴的原点上，则质量分布的线密度函数 $\delta(x)$ 应该具有性质：

(i) $\quad \delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$

(ii) $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$，根据(i)，(ii)和通常的积分运算的性质，还可推出 $\delta(x)$ 的具有下列筛选性质，即对于任意的连续函数 $\varphi(x)$ 有

(iii) $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$

事实上由(i)(ii)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$

利用积分中值定理，再令 $\varepsilon\to0^+$，则得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$$

但是从积分的定义来理解，上述这样的在 R^1 上的可积函数 $\delta(x)$ 是不可能存在的．上述的积分符号只是延用的形式符号而矣．但是从(i)，(ii)形式地推出的 $\delta(x)$ 的筛选性质(iii)可以获得 $\delta(x)$ 所描述的分布密度的信息，而数学上就可以把 $\delta(x)$ 视为是定义在连续函数空间 $C(R^1)$ 上的线性连续泛函，它使任意的连续函数对应一个确定的数 $\varphi(0)$．

类似地，如果单位质量集中地分布在三维空间 R^3 中的一个点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 上，则质量分布的体密度用三维的 δ-函数来描述，记为 $\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\delta(M-M_0)$，其中 $M(x,y,z)$ 是 R^3 中的点．它应具有性质

(i) $\delta(M-M_0)=\begin{cases}0, & M\neq M_0\\ \infty, & M=M_0\end{cases}$

(ii) $\iiint\limits_{R^3}\delta(M-M_0)\mathrm{d}M=1$

(iii) $\iiint\limits_{R^3}\varphi(M)\delta(M-M_0)\mathrm{d}M=\varphi(M_0)$

其中 $\varphi(M)\in C(R^3)$．

根据性质(iii)，可把 $\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 理解为定义在 $C(R^3)$ 上的线性连续泛函，它使任意在 R^3 中的连续函数 $\varphi(x,y,z)$ 对应着一个确定的数 $\varphi(x_0,y_0,z_0)$．

4.2.2 广义函数和广义函数的极限

设 Ω 是 R^n 中的一个区域，$M(\Omega)$ 是定义在 Ω 内的某些函数

构成的一个函数空间，此空间是一个实域或复域的线性空间，而且规定了一定的极限关系，则称 $M(\Omega)$ 为一个基本函数空间.

定义在 $M(\Omega)$ 上的线性连续泛函 T，称为一个广义函数，即 T 是一个从 $M(\Omega)$ 到实域 R 或复域 C 的一个连续映射，使任意 $\varphi(x) \in M(\Omega)$ 对应着一个确定的数，记为 $\langle T, \varphi(x)\rangle$，即

$$M(\Omega) \to R(\text{或 } C)$$

$$T: \varphi(x) \to \langle T, \varphi(x)\rangle$$

这个映射是线性的，即

$$T: \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) \to \alpha_1\langle T, \varphi_1(x)\rangle + \alpha_2\langle T, \varphi_2(x)\rangle$$

这个映射是连续的，即若

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = \varphi(x) \quad (M(\Omega))$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}\langle T, \varphi_k(x)\rangle = \langle T, \varphi(x)\rangle$$

通常也把广义函数 T 记作 $T(x)$，称 x 为它的自变量，称泛函的值 $\langle T(x), \varphi(x)\rangle$ 为一个配对，常常延用积分的记号表示一个配对，即

$$\langle T(x), \varphi(x)\rangle = \int_\Omega T(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$. 又称基本空间的函数 $\varphi(x)$ 为检验函数.

基本空间 $M(\Omega)$ 上线性连续泛函的全体构成一个广义函数的空间，称之为 $M(\Omega)$ 的对偶空间，记为 $M'(\Omega)$，此空间 $M'(\Omega)$ 按自然的方式定义其线性运算，即 $T_1(x), T_2(x) \in M'(\Omega)$，则 $\alpha_1T_1(x) + \alpha_2T_2(x) \in M'(x)$ 定义为

$$\langle \alpha_1T_1 + \alpha_2T_2, \varphi(x)\rangle = \alpha_1\langle T_1, \varphi\rangle + \alpha_2\langle T_2, \varphi\rangle, \forall\ \varphi(x) \in M(\Omega)$$

这样 $M'(\Omega)$ 仍为一个线性空间. 另外在 $M'(\Omega)$ 中定义了一种极限关系

$$\lim_{k\to\infty}T_k(x) = T(x) \quad (M'(\Omega))$$

是指 $T_k(x), T(x) \in M'(\Omega)$，且

$$\lim_{k\to\infty}\langle T_k(x),\varphi(x)\rangle=\langle T(x),\varphi\rangle,\ \forall\ \varphi(x)\in M(\Omega)$$

这种极限关系称为弱极限，如果延用积分的记号，弱极限表明积分号下求极限，积分号和极限号可以互换.

所以广义函数空间 $M'(\Omega)$ 也是一个线性空间，且也具有确定的极限关系(弱极限).

基本函数空间 $M(\Omega)$ 是各式各样的，所以广义函数空间 $M'(\Omega)$ 也是各式各样的. 下面列举一些常用的基本函数空间，为简单计，设 $\Omega=R^n$.

$C^m(R^n)$：R^n 中 m 阶连续可微函数的全体，它的极限关系

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x)=\varphi(x)\quad(C^m(R^b))$$

是指对于 R^n 中的任意一个有界闭集 $\bar{\Omega}$ 上，对于任意的重指标 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$0\leqslant\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant m$ 均有

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in\bar{\Omega}}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|=0$$

称这种极限关系为 m 阶局部一致收敛.

$C^\infty(R^n)=\varepsilon(\mathrm{R}^n)$：无穷阶连续可微函数的全体且在 $\varepsilon(\mathrm{R}^n)$ 中按无穷阶局部一致收敛定义其极限关系

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)\quad(\varepsilon(\mathrm{R}^n))$$

即为对于任意的 R^n 中的有界闭集 $\bar{\Omega}$ 和任意的多重指标 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$0\leqslant\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n<+\infty$，均有

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in\bar{\Omega}}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|=0$$

$\varphi(\mathrm{R}^n)$：(速降空间)在 R^n 中无穷次连续可微且是速降函数的全体，所谓速降是指对于任意的多重指标 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 和 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 和任意 $\varphi(x)\in\varphi(\mathrm{R}^n)$ 均有

$$\lim_{|x|\to\infty}\left|x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|=0$$

另外在 $\varphi(\mathrm{R}^n)$ 中的极限关系

$$\lim_{k\to x}\varphi_k(x)=\varphi(x)\quad(\varphi(\mathrm{R}^n))$$

是指对于任意的重指标 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 和 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in R^n}\left|x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)\right|=0$$

$\varphi(\mathrm{R}^n)$ 中的函数也是很多的，最典型的函数类是

$$P(x)\mathrm{e}^{-|x|^2}=P(x)\mathrm{e}^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$$

其中 $P(x)$ 是任意一个多项式.

$C_0^\infty(R^n)=D(R^n)$：在 R^n 中无穷次连续可微函数且具有紧支集的函数的全体，一个函数 $f(x)$ 的支集为 $\mathrm{supp}f(x)=\overline{\{x|f(x)\neq 0\}}$，即为 $f(x)$ 不等于零的点集和它的极限点的并集. 如果一个函数的支集为 R^n 中的一个有界闭集时，则称它具有紧支集. 在 $D(R^n)$ 中的极限关系

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)\quad(D(R^n))$$

是指存在一个有界闭集 $\overline{\Omega}$，使 $\mathrm{supp}(\varphi_k(x))\subset\overline{\Omega}$, $\mathrm{supp}(\varphi(x))\subset\overline{\Omega}$，且在 $\overline{\Omega}$ 上，对于任意的重指标 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，有

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|=0$$

$D(R^n)$ 中的函数也是很多的，最典型的函数类是

$$\alpha(x)\beta(x, a)$$

其中

$$\alpha(x)\in C^\infty(R^n)$$

$$\beta(x, a)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-a^2}}, & |x|<a\\ 0, & |x|\geqslant a\end{cases}$$

上述的几个基本的函数空间有下列关系：

$$C(R^n)\supset C^1(R^n)\supset C^m(R^n)\supset \varepsilon(\mathrm{R}^n)\supset\varphi(\mathrm{R}^n)\supset \mathrm{D}(\mathrm{R}^n)$$

上述符号有双重意义，一方面表示集合的包含关系，另一方面表示如果在后一个空间中的函数序列 $\varphi_k(x)$ 收敛于 $\varphi(x)$，则作为前

边一个函数空间中的函数序列也收敛于 $\varphi(x)$.

由上述几个基本函数空间也就唯一确定了它们的对偶空间，而对偶空间有下列关系

$$C'(R^n) \subsetneq C^1(R^n)' \subsetneq C^m(R^n)' \subsetneq \mathscr{E}'(\mathrm{R}^n)$$

$$\subsetneq \varphi'(\mathrm{R}^n) \subsetneq \mathrm{D}'(\mathrm{R}^n)$$

直观地讲，基本空间越"好"，则对应的对偶空间的广义函数越广，上述几个广义函数空间中最广的是 $D'(R^n)$，所以若不作特别的说明时，今后讨论的广义函数可认为是 $D'(R^n)$ 中的元素.

例 1　$f(x) \in L_{loc}(R^1)$，即 $f(x)$ 在任何一个有界的区间 $[a, b]$ 上均绝对可积，称之为局部绝对可积，若规定

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\ \varphi(x) \in D(R^1)$$

则 $f(x)$ 为一个广义函数，称这种广函为正则广函. 其它的广函称之为非正则的广函或奇异广函.

例 2　$\delta(x) \in D'(R^1)$：

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad \forall\ \varphi(x) \in D(R^1)$$

这里的积分符号只是形式上的延用而表示泛函的配对. 这是奇异广函. 当然 $\delta(x)$ 也属于前边所述的任何一个广义函数空间，即

$$\delta(x) \in C'(R^1),\ \mathscr{E}'(\mathrm{R}^1),\ \varphi'(\mathrm{R}^1)$$

例 3　广义函数 $\frac{1}{x} \in \varphi'(\mathrm{R}^1)$：

$$\langle \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle = P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\ \varphi(x) \in \varphi(\mathrm{R}^1)$$

其中右端的积分表示积分主值，由分部积分可得

$$P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

此也是一个奇异广函.

例 4 作为广义函数的极限有

(a) $$\lim_{\varepsilon\to 0^+} h_\varepsilon(x) = \delta(x)$$

其中 $h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leqslant \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$

(b) $$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \delta(x)$$

(c) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} = \delta(x)$$

(d) $$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin Nx}{x} = \delta(x)$$

(e) $$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2} = \delta(x)$$

称上述关系式中左端的函数族为 δ-序列，分别称为矩形脉冲序列，Cauchy 脉冲序列，Gauss（正态）脉冲序列，采样脉冲序列和采样函数平方脉冲序列，其图形如(4.1)所示.

这些极限关系均可用定义直接证明，除了(d)外，证明的方法类似. 首先注意到这些 δ-序列的函数族的每一个函数在 R^1 上的积分均是 1. 今以(c)为例来加以证明这种极限关系式.

令 $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1，特别 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\mathrm{d}x = 1$$

任给 $\varphi(x) \in D(R^1)$，则 $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant M$. 又任给一 $\varepsilon_1 > 0$，则 $\exists\, A(\varepsilon_1) > 0$，当 $|x| \leqslant A(\varepsilon_1)$ 时，$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon_1}{2}$.

令
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(0)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x$$

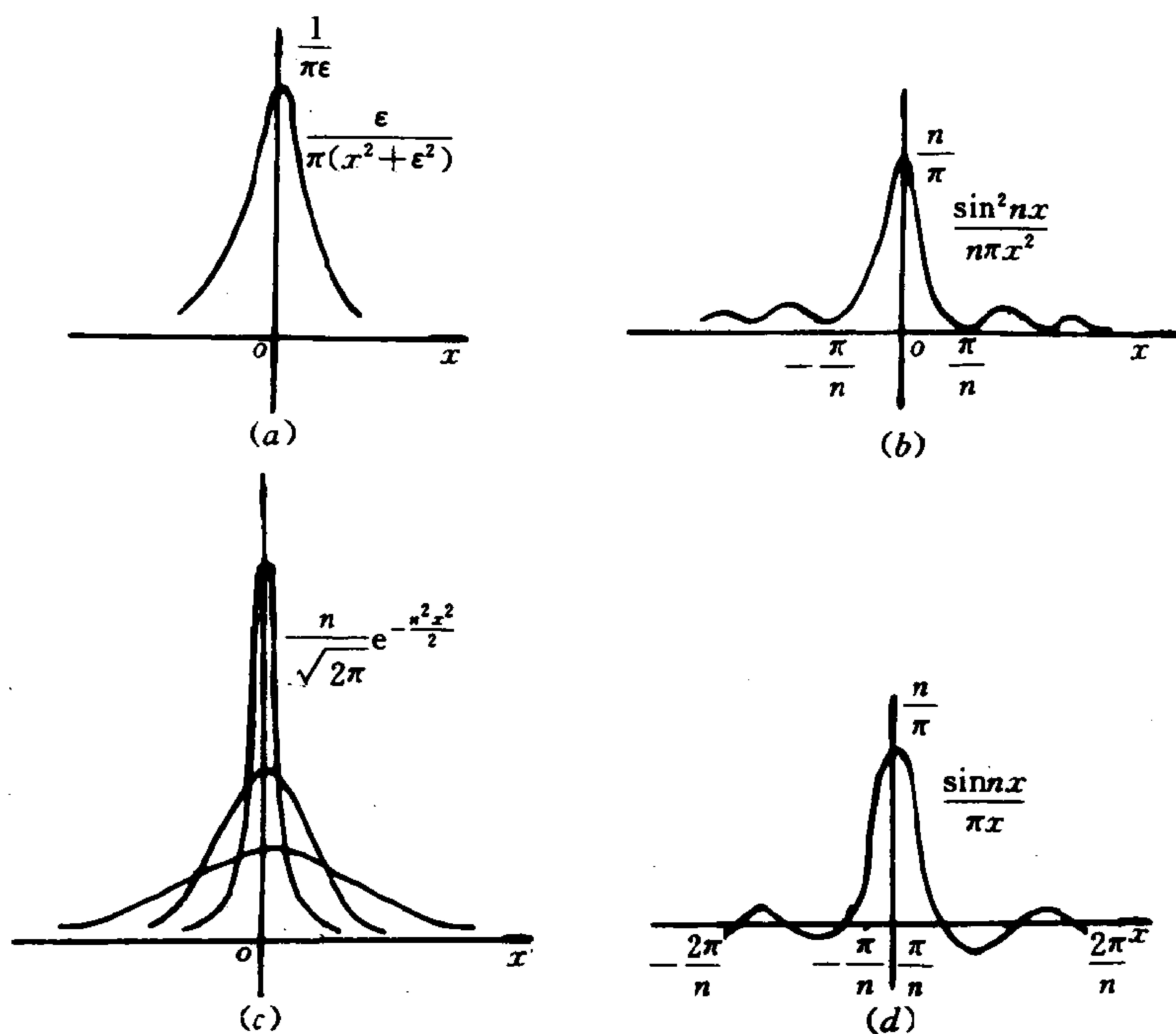


图 4.1

$$= \int_{|x|\leqslant A(\varepsilon_1)} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{|x|\geqslant A(\varepsilon_1)} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x$$

所以

$$|I| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} + M \int_{|x|\geqslant A(\varepsilon_1)} f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon_1}{2} + M \int_{|x|\geqslant \frac{A(\varepsilon_1)}{\varepsilon}} f_1(x)\mathrm{d}x$$

所以 ∃ $\delta(\varepsilon_1)$，当 $\varepsilon \leqslant \delta(\varepsilon_1)$ 时

$$|I| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1$$

所以

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \forall\ \varphi(x) \in D(R^1)$$

所以

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x) = \delta(x)$$

例 5　n 元 Diracδ-函数 $\delta(x) = \delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0), \forall\ \varphi(x) \in D(R^n)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

例6　作为二元广义函数的极限有

(a)　$\lim\limits_{n \to \infty} h_n(x, y) = \delta(x, y)$

$$\text{其中 } h_k = \begin{cases} \dfrac{n^2}{\pi}, & x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \\ 0, & x^2 + y^2 > \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

(b)　$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{1}{2\pi\varepsilon^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon^2}} = \delta(x, y)$

(c)　$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{2\pi(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} = \delta(x, y)$

其证明方法和一元 δ-序列相似.

4.2.3　广义函数的支集和局部性质

设 $f(x)$ 是一个广义函数，若存在 x_0 点的一个邻域 $B_\varepsilon(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$ ，使得支集在 $B_\varepsilon(x_0)$ 内的任意检验函数 $\varphi(x)$ 均有

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = 0$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点的邻近为零. 否则称 $f(x)$ 在点 x_0 不为零，延用记号 $f(x_0) \neq 0$ 来表示. 由此可定义广义函数 $f(x)$ 的支集为

$$\mathrm{supp} f(x) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$$

广义函数的支集是一个闭集. 例如：

$$\mathrm{supp}\delta(x) = \{0\}$$

$$\text{supp}\{\delta(x)+\delta(x-1)\}=\{0,1\}$$

如果一个广义函数在一个区域 Ω 内每一点的邻近均为零，则称 $f(x)$ 在 Ω 内为零，这时对于支集包含在 Ω 内的任意检验函数 $\varphi(x)$ 均有

$$\langle f(x),\varphi(x)\rangle=0$$

如果 $f(x)-g(x)$ 在区域 Ω 内为零，则称广义函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区域 Ω 内相等. 在广义函数中说它在一个点的值是无意义的，但是在一个区域内它可以等于一个很光滑的函数，例如在不包含原点的任意一个区间 (a,b) 内，$\delta(x)=0$.

总之和普通函数类似，也可以分析广义函数的局部性质，可以把一个广义函数限制在一个局部的区域来讨论，使得关于普通函数有些积分运算的性质可以推广到广义函数中，而且仍延用积分的记号. 从数学上对局部性质的分析讨论是较细致和繁复的，不多论述，但从直观的意义来了解有些性质是很自然的. 下面以一元广函为例介绍一些常用的性质和记号.

如果 $\text{supp}f(x)\cap\text{supp}\varphi(x)\subset[a,b]$，则配对 $\langle f(x),\varphi(x)\rangle$ 只由在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的局部性质来确定，和它们在 $[a,b]$ 外的局部性质无关，所以可记为

$$\langle f(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

特别，如果 $f(x)$ 的支集包含在 $x\geqslant 0$ 上，则

$$\langle f(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

如果广义函数 $f(x)$ 的支集包含在一个有界的闭区间 $[a,b]$ 内，则 $f(x)$ 也是 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^1)$ 中的广义函数，称之为紧支广义函数，这时可记为

$$\langle f(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\ \forall\ \varphi(x) \in \varepsilon(\mathrm{R}^1)$$

如果 $\mathrm{supp}f(x) \cap \mathrm{supp}\varphi(x) = \Phi$（空集），则

$$\langle f(x),\ \varphi(x)\rangle = 0$$

特别对于任意的检验函数 $\varphi(x) \in \varepsilon(\mathrm{R}^1)$，有

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \varphi(0),\ 0 \in (a,\ b) \\ 0,\ 0 \in (a,\ b)\ \text{之外部} \end{cases}$$

4.2.4 广义函数的某些简单运算

本目中讨论的广义函数的简单运算，如果配对视作一个积分，那么相应于积分来说这些性质是显然成立的，但因为配对不一定是积分，所以要重新加以定义，这样在实际操作时进行的各种形式运算就有了理论的根据而不再是形式的.

(i) **乘子运算** 若 $f(x) \in D'(R^1)$，$a(x) \in C^\infty(R^1)$，则定义广义函数 $a(x)f(x) \in D'(R^1)$ 为

$$\langle a(x)f(x),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ a(x)\varphi(x)\rangle,\ \forall\ \varphi(x) \in D(R^1)$$

称 $a(x)$ 为 $D'(R^1)$ 中的乘子，例如

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

(ii) **直积运算** 若 $f(x) \in D'(R^1)$，$g(y) \in D'(R^1)$，则 $f(x)$ 和 $g(y)$ 的直积 $f(x) \otimes g(y)$（或简单地记为 $f(x)g(y)$）定义为 $D'(R^2)$ 中的广义函数

$$(\langle f(x)g(y),\ \varphi(x,\ y)\rangle = \langle f(x),\ \langle g(y),\ \varphi(x,\ y)\rangle\rangle$$

$$\forall\ \varphi(x,\ y) \in D(R^2)$$

(iii) **广义函数自变量的代换** 若 $u = u(x)$ 和反变换 $x = x(u)$ 都是无穷次连续可微的，则广义函数 $f(u(x))$ 或 $f(x(u))$ 定义为

$$\langle f(u(x)),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(u),\ \varphi(x(u))\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right|\rangle$$

或

$$\langle f(x(u)),\ \varphi(u)\rangle = \langle f(x),\ \varphi(u(x))\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|\rangle$$

即用右端来定义左端，在一般条件下自变量 x 和 u 的变化范围是不同的，对于多元函数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ 和 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 分别表示变换和反变换的 Jacobi 行列式，例如：

$$\langle f(x-x_0),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ \varphi(x+x_0)\rangle \quad (\text{平移})$$

$$\langle f(ax),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ \frac{1}{|a|}\varphi(\frac{x}{a})\rangle \quad (\text{一元相似变换})$$

$$\langle f(ax),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ \frac{1}{|a|^n}\varphi(\frac{x}{a})\rangle \quad (n\ \text{元相似变换})$$

$$\langle f(-x),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ \varphi(-x)\rangle \quad (\text{反射})$$

$$\langle f(Ax),\ \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\ \frac{1}{|\det A|}\varphi(A^{-1}x)\rangle \quad (\text{非奇异线性变换})$$

特别有

$$\langle \delta(x-x_0),\ \varphi(x)\rangle = \varphi(x_0)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (\text{偶广义函数})$$

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\delta(x-\frac{b}{a}) \quad (\text{一元})$$

$$\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|^n}\delta(x-\frac{b}{a}) \quad (n\ \text{元})$$

$$\delta(Ax+b) = \frac{1}{|\det A|}\delta(x-A^{-1}b)$$

上述一般自变量的代换需具有唯一的反变换. 而且正变换和反变换均是无穷次连续可微的，但是对于具体的广义函数而言，只要在它的支集邻域有这种性质即可，特别是对于支集只是一些孤立的点的 δ-型广义函数，只要在这些孤立点的邻域有这种性质即可，所以变数代换有一些更特殊和简单的性质，列举一些如下：

若 $u(x)$ 无穷次连续可微，且有一些孤立的实零点 x_i，且 $u'(x_i)\neq 0$，$i=1, 2, \cdots$，则

$$\delta(u(x)) = \sum_i \frac{1}{|u'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$

这相当于在 $\delta(u(x))$ 的支集 $\{x_i | i = 1, 2, \cdots\}$ 的每一点 x_i 邻近进行变数代换的结果，特别

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x - a) + \delta(x + a)]$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$$

若在 $\delta(x, y)$ 中引入极坐标变换 r, θ，则

$$\delta(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2\pi r}\delta(r) \otimes 1 = \frac{1}{2\pi r}\delta(r)$$

其意义是一方面

$$\langle \delta(x, y), \varphi(x, y) \rangle = \varphi(0, 0)$$

另一方面

$$\langle \delta(r\cos\theta, r\sin\theta), r\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) \rangle$$

$$= \langle \frac{\delta(r)}{2\pi r}, r\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(0, 0)\mathrm{d}\theta = \varphi(0, 0)$$

若 $\delta(x - x_0, y - y_0)$ 中引入极坐标变换 (r, θ)，则

$$\delta(r\cos\theta - x_0, r\sin\theta - y_0) = \frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)}{r}$$

其意义是一方面

$$\langle \delta(x - x_0, y - y_0), \varphi(x, y) \rangle = \varphi(x_0, y_0)$$

另一方面

$$\langle \frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)}{r}, r\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) \rangle = \varphi(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)$$

$$= \varphi(x_0, y_0)$$

另外常用到支集在某一曲线上的二元广义函数和支集在某一曲面上的三元广义函数. 例如 $\delta(r - r_0)$，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，其支集

在圆周 $r=r_0$ 上，则

$$\langle\delta(r-r_0),\ \varphi(x,\ y)\rangle=\int\limits_{r=r_0}\varphi(x,\ y)\mathrm{d}s$$

其意义是利用极坐标变换，则

$$\begin{aligned}\langle\delta(r-r_0),\ \varphi(x,\ y)\rangle&=\langle\delta(r-r_0),\ r\varphi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\rangle\\&=\int_0^{2\pi}r_0\varphi(r_0\cos\theta,\ r_0\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int\limits_{r=r_0}\varphi(x,\ y)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

又如 $\delta(r-r_0)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．这是支集在球面 $r=r_0$ 上的三元广义函数，则

$$\langle\delta(r-r_0),\ \varphi(x,\ y,\ z)\rangle=\oiint\limits_{r=r_0}\varphi(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s$$

其意义是利用球坐标变换，则

$$\begin{aligned}&\langle\delta(r-r_0),\ \varphi(x,\ y,\ z)\rangle\\&=\langle\delta(r-r_0),\ r^2\sin\theta\varphi(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\rangle\\&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}r_0^2\sin\theta\varphi(r_0\sin\theta\cos\varphi,\ r_0\sin\theta\sin\varphi r,\ r_0\cos\theta)\mathrm{d}\varphi\\&=\iint\limits_{r=r_0}\varphi(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

4.2.5 广义函数的导数和对参数的导数

设 $f(x)$ 为一元广义函数，则它的导数 $f'(x)$ 定义为

$$\langle f'(x),\ \varphi(x)\rangle=-\langle f(x),\ \varphi(x)\rangle$$

若 $f(x)$ 为 n 元广义函数，则它的偏导数 $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ 定义为

$$\langle\frac{\partial f(x)}{\partial x_k},\ \varphi(x)\rangle=-\langle f(x),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\rangle$$

从形式上看这种定义就是分部积分公式，它把广义函数的导数转

移到基本函数的导数. 可以证明这样的定义等价于

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

直接由定义容易推出下列性质:

①任意广义函数均为无穷次可导, 且

$$\langle f^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle = (-1)^n \langle f(x), \varphi^{(n)}(x) \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \varphi(x) \right\rangle = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \left\langle f(x), \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\rangle$$

② $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \cdot \partial x_i}$

③ $(a(x)f(x))' = a'(x)f(x) + a(x)f'(x)$

其中 $a(x)$ 为乘子.

④ $(f(u(x)))' = u'(x)f'(u(x))$

⑤**如果** $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ **, 则**

$$\lim_{n \to \infty} f'_n(x) = f'(x)$$

设 $f(x, t)$ 是含有连续参变量 t 的广义函数族, 则 $\dfrac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ **定义为**

$$\left\langle \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}, \varphi(x) \right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f(x, t), \varphi(x) \rangle$$

可证明它等价于

$\dfrac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}$, **且可证** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i}$

例1 $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ 称 $H(x)$ 为 Heaviside 函数, 则

$$H'(x) = \delta(x)$$

例2 $\delta'(x)$ (偶极子), $\delta''(x)$, …, $\delta^{(n)}(x)$:

$$\langle \delta'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle \delta(x), \varphi'(x) \rangle = -\varphi'(0)$$

$$\langle \delta^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

例3 设 $f(x)$ 是分段光滑的函数, 有有限个或可列个第一类

间断点 x_1，x_2，…，x_k，…，其跃度分别为 p_1，p_2，…，p_k，…，则

$$f'(x) = [f'(x)] + \sum_i p_i \delta(x - x_i)$$

其中 $[f'(x)]$ 是由 $f(x)$ 的通常意义的导函数所确定的正则广函，它在 $f(x)$ 不可导的点可以不加定义.

例4 由于

$$P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x,\ \forall\ \varphi(x) \in D(R^1)$$

所以作为广义函数有

$$\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$$

即

$$\langle \frac{1}{x},\ \varphi(x)\rangle = -\langle \ln|x|,\ \varphi'(x)\rangle$$

另外，作为广义函数的导数可以递推地定义广义函数 $\frac{1}{x^n}$：

$$\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$$

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)',\ n \geqslant 2$$

即

$$\langle \frac{1}{x^n},\ \varphi(x)\rangle = \frac{-1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x$$

广义函数 $\frac{1}{x^n}$ 均为奇异广函. 从形式看，这时的广义函数的导数和普通函数的导函数相一致.

例5 支集在 $x \geqslant 0$ 中的奇异广义函数 $\frac{1}{x^n}H(x)$ 可由下列递推公式确定

$$\frac{1}{x}H(x) = (H(x)\ln x)'$$

$$\frac{1}{x^2}H(x) = -\left(\frac{1}{x}H(x)\right)' - \delta'(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{x^{n+1}}H(x) = -\left(\frac{H(x)}{nx^n}\right)' + \frac{(-1)^n\delta^{(n)}(x)}{n!n}$$

从递推的定义可知，这时广义函数的导数和普通函数的导函数并不一致，而是增加了支集在原点的 δ-型广义函数的项，其所以这样的定义是根据发散积分的理论而建立的，这里不能进行详细的讨论.

例6 设具有连续参数 $t(t>0)$ 的广义函数

$$f(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

因 $\lim\limits_{t\to 0} f(x,t) = \delta(x)$，所以 $\lim\limits_{t\to 0} f'(x,t) = \delta'(x)$，即

$$\lim_{t\to 0}\frac{x}{4a^3t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \delta'(x)$$

例7 $\delta(x)$ 的 Fourier 级数展开，在 $(-\pi,\pi)$ 上作为 $D'(-\pi,\pi)$. 把 $\delta(x)$ 展成 Fourier 级数

$$\delta(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x)\sin nx\,dx = 0$$

所以

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + \sum_{n=1}^{\infty}2\cos nx)$$

所以

$$\delta'(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin nx$$

$$\delta''(x) = \frac{-1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cos nx$$

如果把 $\delta(x)$ 以周期为 2π 进行周期延拓，作为 $D'(R^1)$ 中的广函得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi) = \frac{1}{2\pi}(1+\sum_{n=1}^{\infty}2\cos nx)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(x-2k\pi) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin nx$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta''(x-2k\pi) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cos nx$$

例8 设 $f(x)$ 为周期为 2π 的函数，在一个周期内

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2},\ 0 < x < 2\pi$$

把此周期函数作 Fourier 正弦级数展开得

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

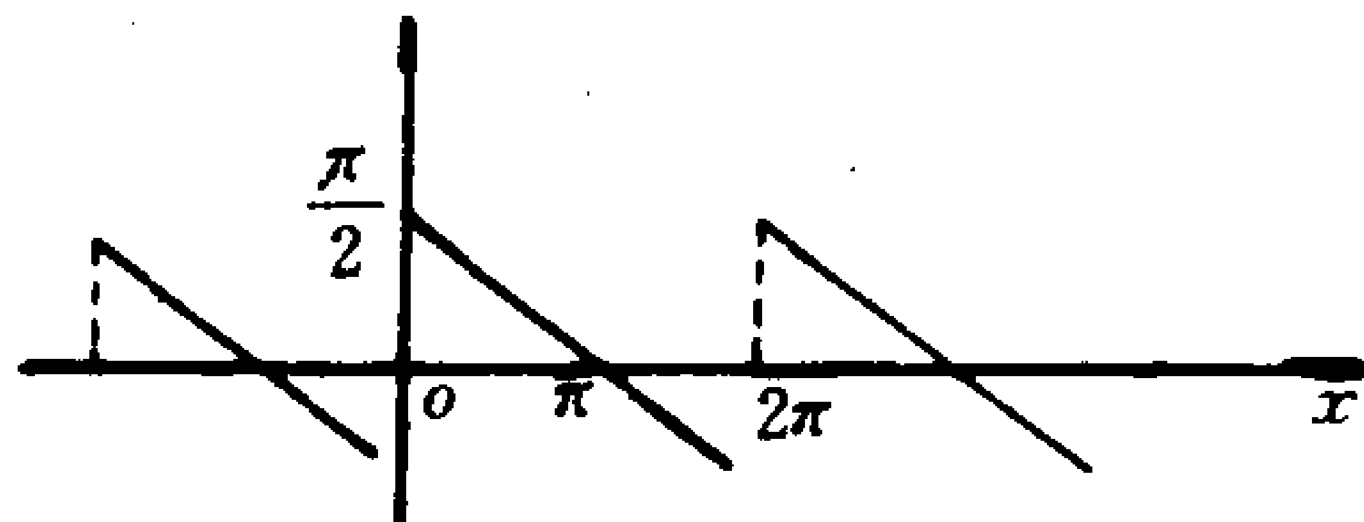


图 4.2

这是一个正则广义函数，它逐段光滑有可列个第一类间断点的 $2k\pi(k\in Z)$，每一点的跃度为 π，如图(4.2). 根据广义函数的导数得

$$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

$$\pi\sum\delta'(x-2k\pi) = -\sum_{n=1}^{\infty}n\sin nx$$

如果限制在 $(0, 2\pi)$ 内，则

$$-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

$$0=-\sum_{n=1}^{\infty}n\sin nx$$

如果限制在 $(-\pi,\pi)$ 内，则

$$-\frac{1}{2}+\pi\delta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

$$\pi\delta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}n\sin nx$$

例9 $H(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

这是一个正则广函，根据广义函数的导数

$$\left\langle\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\partial x_2},\varphi(x_1,x_2)\right\rangle=\left\langle H(x_1,x_2),\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\right\rangle$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$=\varphi(0,0)$$

所以

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\partial x_2}=\delta(x_1,x_2)$$

例10

$$f(x,y,z)=\frac{1}{r},r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

这是一个三元的正则广函，则

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

事实上，若 $\varphi(x,y,z)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$，$(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$，则

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega - B_\varepsilon(M_0)} \frac{1}{r} \Delta\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega - B_\varepsilon(M_0)} \left(\frac{1}{r} \Delta\varphi - \varphi\Delta \frac{1}{r}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $B_\varepsilon(M_0)$ 表示以 M_0 为中心，ε 为半径的小球域，根据 Gauss 公式得

$$I = \iint\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\right) \mathrm{d}s - \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\partial B_\varepsilon(M_0)} \left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi + \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi\right) \mathrm{d}s$$

$$= \iint\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\right) \mathrm{d}s - 4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0)$$

所以根据广义函数导数的定义，对任意的 $\varphi(x, y, z) \in D(R^3)$

$$\langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi \rangle = \langle \frac{1}{r}, \Delta\varphi \rangle = \iiint\limits_{R^3} \frac{1}{r} \Delta\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -4\pi\varphi(x_0, y_0, z_0)$$

即
$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

此公式的物理意义明显，$\frac{1}{r}$ 是位于点 (x_0, y_0, z_0) 的单位正电荷在自由空间中产生的电位，$\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 是电荷分布的密度函数.

从上述例子中可以看到，一个奇异广义函数可以用某一个正则广函数的微分式来表示，这个结论具有一般性，应用中的广义函数的一个配对总是可以通过正则广函的微分式表示为某一个积分.

4.2.6 广义函数的折积

设 $f(x) \in \varepsilon'(\mathrm{R}^1)$，$g(x) \in \varphi'(\mathrm{R}^1)$，则 $f(x) * g(x) \in \varphi'(\mathrm{R}^1)$ 定义为

$$\langle f(x) * g(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle$$

仍把折积记为

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) \mathrm{d}\xi$$

所以，一切延用积分的记号，则折积的定义相当于积分号的交换和变数代换，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \varphi(\xi+\eta) \mathrm{d}\eta$$

根据定义可证明

① $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$

② $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) * g(x)) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} * g(x)$

③ $\delta(x) * f(x) = f(x)$

$\delta^{(n)}(x) * f(x) = f^{(n)}(x)$

4.2.7 广义函数的 Fourier 变换

首先介绍 $\varphi(R^1)$ 中 Fourier 变换的性质，若 $\varphi(x) \in \varphi(R^1)$，则 FT

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x = F[\varphi]$$

仍然是 $\varphi(R^1)$ 中的函数. 所以有反变换

$$F^{-1}[\hat{\varphi}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda x} \mathrm{d}\lambda = \varphi(x)$$

最简单的例子是

$$F(e^{-\frac{x^2}{2}}) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

所以 Fourier 变换建立了 $\varphi(R^1)$ 中函数的一一对应.

$\varphi(R^n)$ 中的 Fourier 变换也有完全类似的性质.

仍然用把广义函数的 Fourier 变换转移到基本空间的方法来

定义 $\varphi'(R^1)$ 中广义函数的 Fourier 变换和 Fourier 反变换.

设 $f(x)\in\varphi'(R^1)$，则定义 f 的 Fourier 变换和 Fourier 反变换分别为

$$\langle F[f],\varphi\rangle=\langle f,F[\varphi]\rangle$$

$$\langle F^{-1}[f],\varphi\rangle=\langle f,F^{-1}[\varphi]\rangle$$

仍然延用记号

$$F[f]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=\hat{f}(\lambda)$$

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx$$

$\varphi'(R^n)$ 中广义函数的 n 元 Fourier 变换和反变换是完全类似的，Fourier 变换建立了 $\varphi'(R^n)$ 中广义函数之间的一一对应. 而且根据基本空间 $\varphi(R^n)$ 中 Fourier 变换的性质就可以推出广义函数空间 $\varphi'(R^n)$ 中 Fourier 变换相应的性质. 例如：

① $F[F^{-1}[f]]=F^{-1}[F[f]]=f$

② $F[f'(x)]=i\lambda F[f]=i\lambda\hat{f}(\lambda)$ （一元）

$F[\frac{\partial f}{\partial x_k}]=i\lambda_k\hat{f}(\lambda)$ （n 元）

③ $F[(x-a)]=e^{-i\lambda a}\hat{f}(\lambda)$ （一元）

$F[(x-a)]=e^{-i\lambda\cdot a}\hat{f}(\lambda)$ （n 元）

④ $F[xf(x)]=if'(\lambda)$ （一元）

$F[x_kf(x)]=i\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\lambda_k}$ （n 元）

⑤ $F[e^{ia\cdot x}f(x)]=\hat{f}(\lambda-a)$

⑥ $F[\hat{f}(\lambda)]=2\pi f(-x)$ （一元）

$F[\hat{f}(\lambda)]=(2\pi)^nf(-x)$ （n 元）

⑦ 若 $f(x)\in\varepsilon'(R^1)$, $g(x)\in\varphi'(R^1)$，则 $f(x)*g(x)\in$

$\varphi'(R^1)$ 且有 $F[f(x)*g(x)]=F[f]\cdot F[g]$.

除了⑦外，其它①—⑥的证明是较容易的. 这样大大的推广了 Fourier 变换的概念，使得许多按古典的意义不能进行 Fourier 变换的函数，在广义函数 Fourier 变换的意义下可以进行. 而且当一个函数古典意义下的 Fourier 变换存在时，它也就是广义函数意义下的 Fourier 变换. 下面是本书中将用到的 Fourier 变换简表，供查阅.

$$f(x)\to\hat{f}(\lambda)=\int_{R^n}f(x)e^{-i\lambda\cdot x}dx$$

一元的情况：

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\to\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$H(a-|x|)\to\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}$$

$$\frac{\sin ax}{x}\to\pi H(a-|\lambda|)$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{a^2}{x^2+a^2}\to e^{-a|\lambda|}$$

$$\frac{1}{x}\to\pi i sgn\lambda$$

$$e^{-a|x|}\to\frac{2a^2}{\lambda^2+a^2}$$

$$\frac{1}{x^2}\to\pi\lambda sgn\lambda$$

$$1\to 2\pi\delta(\lambda)$$

$$sgnx\to -i\frac{2}{\lambda}$$

$$x^n\to 2\pi(i)^n\delta^{(n)}(\lambda)$$

$$\delta(x)\to 1$$

$$\delta^{(n)}(x)\to(i\lambda)^n$$

$$|x|=xsgnx\to\frac{-2}{\lambda}$$

$$\sin ax\to i\pi(\delta(\lambda+a)-\delta(\lambda-a))$$

$$\cos ax \to \pi(\delta(\lambda - a) + \delta(\lambda + a))$$

$$H(x) \to \pi\delta(\lambda) - i\,\frac{1}{\lambda}$$

$$xH(x) \to \pi i\delta'(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2}$$

n 元的情况：$(n \geqslant 2)$.

记 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$，$|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$

$$e^{-\frac{|x|^2}{2}} \to (2\pi)^n e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}$$

$$\delta(x) \to 1$$

$$1 \to (2\pi)^n\delta(\lambda)$$

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \to (2\pi)^n(i)^{\alpha_1+\cdots\alpha_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\delta(\lambda)}{\partial\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\partial\lambda_n^{\alpha_n}}$$

$$\frac{1}{|x|} \to 4\pi\,\frac{1}{|\lambda|^2} \quad (n = 3)$$

$$\frac{1}{|x|^2} \to 2\pi^2\,\frac{1}{|\lambda|} \quad (n = 3)$$

$$\frac{1}{|x|^2} \to -2\pi\ln|\lambda| - 2\pi c$$

$$\left(n = 2,\ c = \int_0^1 \frac{1 - J_0(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\frac{J_0(x)}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$\ln|x| \to -\frac{2\pi}{|\lambda|^2} - 4\pi^2 c\delta(\lambda) \quad (n = 2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - |x|^2}}H(a^2 - |x|^2) \to 2\pi\,\frac{\sin a|\lambda|}{|\lambda|} \quad (n = 2)$$

$$\delta(|x| - a) \to 4\pi a\,\frac{\sin a|\lambda|}{|\lambda|} \quad (n = 3)$$

$$\left(\frac{\partial}{a\partial a}\right)^m\left(\frac{\delta(|x| - a)}{a}\right) \to 2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\sin a|\lambda|}{|\lambda|} \quad (n = 2m + 3)$$

$$\delta(|x| - a) \to 2\pi^{\frac{n-1}{2}}a^{\frac{n}{2}}|\lambda|^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-3}{2}}(a|\lambda|)\Big/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad (n \geqslant 2)$$

根据上述一元的 Fourier 变换简表，在广义函数的意义下可得下列常用的公式

$$\int_0^{+\infty} \cos\lambda x \mathrm{d}x = \pi\delta(\lambda), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda x \mathrm{d}x = 2\pi\delta(\lambda)$$

$$\int_0^{+\infty} \sin\lambda x \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda x \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda_1 x \cos\lambda_2 x \mathrm{d}x = \pi(\delta(\lambda_1 + \lambda_2) + \delta(\lambda_2 - \lambda_1))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda_1 x \sin\lambda_2 x \mathrm{d}x = \pi(\delta(\lambda_1 - \lambda_2) - \delta(\lambda_2 + \lambda_1))$$

根据 Fourier 变换的简表和 Fourier 变换的性质就可得出更多的广义函数的 Fourier 变换和在广义函数意义下的许多含参变量的积分公式.

4.2.8 广义函数的 Laplace 变换

设 $y(t)$ 定义在 $t \geqslant 0$ 上，局部绝对可积，且 $t \to +\infty$ 时，$|f(t)| \leqslant Me^{ct}(c \geqslant 0)$，则称 $y(t)$ 是局部绝对可积的指数增长型的；对于这种类型的函数有通常意义下的 Laplace 变换

$$Y(p) = L[y(t)] = \int_0^{+\infty} y(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \ \mathrm{Re}p > c$$

且 $Y(p)$ 在 $\mathrm{Re}p > c$ 内解析，当 $\mathrm{Re}p > c + \varepsilon$，$p \to \infty$ 时 $Y(p) \to 0$. 所以可以进行通常意义下的 Laplace 变换的函数类是较多的. 但是当要对 $y(t)$ 和 $y'(t)$ 均作 Laplace 变换时，则需设 $y(t)$ 连续，$y'(t)$ 几乎处处存在，$y(t)$，$y'(t)$ 均是局部绝对可积的指数增长型函数，这时有下列公式

$$L[y'(t)] = pL[y(t)] - y(0)$$

这是用 Laplace 变换解微分方程定解问题最基本的公式，但是对于像分段光滑而有一些第一类间断点的函数都不满足这种条件，

上述公式也不再成立. 另外对于应用中较为重要的脉冲函数 $\delta(t)$, $\delta(t-\tau)$, $\delta'(t)$ 等也不能进行通常意义下的 Laplace 变换, 所以需要推广 Laplace 变换的概念.

一种推广 Laplace 变换的方法也是用广义函数的理论来实现的. 首先把定义在 $t \geqslant 0$ 中的函数 $y(t)$ 延拓到 $(-\infty, \infty)$ 而得

$$f(t)=\begin{cases} y(t), & t \geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

所以把对 $y(t)$ 的研究转移为对 $f(t)$ 的研究. 则定义 $f(t)$ 的 Laplace 变换为支集在 $t \geqslant 0$ 上的广义函数 $e^{-\sigma t}f(t)$ 的广义 Fourier 变换, 记为

$$\begin{aligned} \hat{f}(p)=L[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-(\sigma+\lambda i)t} f(t) dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p=\sigma+i\lambda \end{aligned}$$

类似地, 称广义函数 $f'(t)e^{-\sigma t}$ 的广义 Fourier 变换为 $f'(t)$ 的广义的 Laplace 变换, 对于广义的 Laplace 变换普遍成立着下列公式

$$L[f^{(n)}(t)]=p^n L[f(t)]=p^n \hat{f}(p)$$

下面是某些广义的 Laplace 变换

$L[H(t)]=\dfrac{1}{p}$, 它也是古典的 Laplace 变换. $L(\delta(t))=1$

$L(\delta^{(n)}(t))=p^n$

$L[t^\alpha]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$

其中 α 不是负整数, 当 $\alpha>-1$ 时它也是通常意义的 Laplace 变换, 当 $\alpha<-1$ 时它是广义的 Laplace 变换.

$$L\left(\frac{1}{t^n}H(t)\right)=\frac{(-1)^{(n-1)}p^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}-\ln p\right]$$

其中 n 为正整数，这也是奇异广函的广义的 Laplace 变换.

另外，广义的 Laplace 变换 $\hat{f}$，当 p 沿着正实轴趋于 ∞ 时，$|\hat{f}(p)|$ 的增长也不能超过一个 p 的多项式，这一事实在应用 Laplace 变换解微分方程的定解问题时经常用到，例如，当 $a>0$ 时，e^{ap}，$e^{a\sqrt{p}}$ 等是不能取作 Laplace 变换的象函数而应舍去.

最后指出，当应用 Laplace 变换解常系数微分方程带有初始条件的定解问题时，应该注意通常意义下的 Laplace 变换和广义 Laplace 变换之间的联系和区别，例如设初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt},\ t>0 \\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1 \end{cases}$$

这时函数是定义在 $t\geqslant 0$ 上，作通常意义的 Laplace 变换得

$$p^2Y(p)-py_0-y_1+a_1(pY(p)-y_0)+a_2Y(p)=\hat{\varepsilon}(p)-\varepsilon(0)$$

但是若作广义的 Laplace 变换时，广义函数在一点的值是无意义的，所以初始条件应该转化成方程之中的某些附加项，其物理意义是在 $t=0$ 时突然的初始激发应该转化为某些形式的脉冲激发，这时首先应设

$$f(t)=\begin{cases} y(t),\ t\geqslant 0 \\ 0,\ t<0 \end{cases} \qquad E(t)=\begin{cases} \varepsilon(t),\ t\geqslant 0 \\ 0,\ t<0 \end{cases}$$

则按广义函数的导数运算应该有

$$f'(t)=y'(t)+\delta(t)y_0$$

$$f''(t)=y''(t)+\delta'(t)y_0+\delta(t)y_1$$

$$E'(t)=\varepsilon'(t)+\varepsilon(0)\delta(t)$$

所以得

$$f''(t)+a_1f'(t)+a_0f(t)=E'(t)+\delta'(t)y_0 + (y_1+a_1y_0-\varepsilon(0))\delta(t)$$

作广义的 Laplace 变换得

$$p^2\hat{f}(p)+a_1p\hat{f}(p)+a_0\hat{f}(p)=p\hat{E}(p)+py_0+(y_1+a_1y_0-\varepsilon(0))$$

两种不同的处理方法所得到的结果实质上是一致的，在某些常系数线性系统中，这种广义的处理更为方便.

4.3 基 本 解

4.3.1 微分方程的基本解

根据广义函数的运算，可以在广义函数空间中来讨论一般的线性微分方程的解，例如 n 个自变量的二阶线性微分方程

$$L[u]=\sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u$$
$$=f(x) \tag{1}$$

其中 $a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$c(x)\in C^\infty(R^n)$，$f(x)\in D'(R^n)$，在广义函数空间 $D'(R^n)$ 中方程(1)的解 $u(x)$ 是

$$\langle L[u],\varphi(x)\rangle=\langle f(x),\varphi(x)\rangle,\ \forall\ \varphi(x)\in D(R^n)$$

即

$$\langle u,L^*[\varphi]\rangle=\langle f(x),\varphi(x)\rangle$$

其中 L^* 是 L 的共轭微分算子，特别对于齐次方程 $f(x)=0$ 时，则

$$\langle u(x),L^*[\varphi]\rangle=0,\ \forall\ \varphi(x)\in D(R^n)$$

若 $E(x,\xi)$ 满足

$$L[E(x,\xi)]=\delta(x-\xi)$$

则称 $E(x,\xi)$ 为方程(1)的一个基本解.

由基本解 $E(x,\xi)$ 和线性迭加原理，形式上可得方程(1)的一个解

$$u(x)=\int_{R^n}f(\xi)E(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

B9

形式地验证为

$$
\begin{aligned}
L[u(x)] &= \int_{R^n} f(\xi) L(E(x, \xi)) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{R^n} f(\xi) \delta(x - \xi) \mathrm{d}\xi \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

在广义函数的意义下，广义函数

$$
u(x) = \int_{R^n} f(\xi) E(x, \xi) \mathrm{d}\xi
$$

定义为

$$
\langle u(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(\xi), \langle E(x, \xi), \varphi(x) \rangle \rangle, \ \forall \varphi(x) \in D(R^n)
$$

这种定义类似于两个广义函数的折积.

基本解 $E(x, \xi)$ 又称为点源函数或影响函数，它的直观意义是表示在点 ξ 给一个单位脉冲点源而产生的物理场的分布.

根据定义，方程(1)的基本解 $E(x, \xi)$ 不是唯一的，它可以相差齐次方程的一个解，但通常要根据问题的物理意义和数学上的需要而选定某一个基本解为方程的基本解，这种特定的基本解又常称为方程在 R^n 中的格林函数，后面将用三个典型方程的基本解来说明这种特殊选定的含义.

一般而言，变系数线性方程(1)的基本解是很复杂的，而且它的存在性也未见有一般的证明. 但业已证明常系数线性方程的基本解总是存在的，而且通常可用 Fourier 变换的方法把基本解构造出来.

对于常系数二阶线性方程

$$
L[u] = \sum \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x) \quad (2)
$$

其中 a_{ij}, b_i, c 均为常数，由于对于自变量的平移方程不变，所以总可选脉冲点源位于原点，而称满足

$$
L[E(x)] = \delta(x)
$$

的解 $E(x)$ 为常系数方程(2)的基本解，这时

$$L\,(E(x-\xi)) = \delta(x-\xi)$$

而方程(2)的一个解可以表为

$$u(x) = f(x) \star E(x) = \int_{R^n} f(\xi)E(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

例1　常微分方程的基本解.

设

$$L(u(x)) = u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)u(x) = f(x)$$

若 $U(x,\xi)$ 满足

$$\begin{cases} L\,[U(x,\xi)] = 0 \\ U|_{x=\xi} = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi} = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^{n-2}U}{\mathrm{d}x^{n-2}}\right|_{x=\xi} = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}U}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right|_{x=\xi} = 1 \end{cases}$$

则

$$E(x,\xi) = \begin{cases} U(x,\xi), & x \geqslant \xi \\ 0, & x < \xi \end{cases} = U(x,\xi)H(x-\xi)$$

为方程

$$L\,[u(x)] = f(x)$$

的一个基本解. 此基本解的支集在 $x \geqslant \xi$ 中，它在点 ξ 的 $(n-1)$ 阶导数有一个单位跳跃，所以 n 阶导数产生一个单位脉冲. 这种基本解表示脉冲点源 $\delta(x-\xi)$ 只在 x 增加的方向施其影响而得出的影响函数.

对于常系数常微分方程

$$L\,[u] = u^{(n)}(x) + a_{n-1}u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0u(x) = f(x)$$

它的基本解 $E(x) = U(x)H(x)$，其中

$$\begin{cases} L[U]=0 \\ U(0)=\cdots=U^{(n-2)}(0)=0,\ U^{(n-1)}(0)=1 \end{cases}$$

通常又称 $U(x)$ 为初值问题

$$\begin{cases} u^{(n)}(x)+a_{n-1}u^{(n-1)}(x)+\cdots+a_0u(x)=f(x),\ x>0 \\ u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1,\ \cdots,\ u^{(n-1)}(0)=u_{n-1} \end{cases}$$

的基本解. 根据叠加原理和齐次化原理，上述初值问题的解可表为

$$u(x)=u_{n-1}U(x)+u_{n-2}U'(x)+\cdots+u_0U^{(n-1)}(x)+f(x)*U(x)$$

其中

$$f(x)*U(x)=\int_0^x f(\xi)U(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

例如：

$u'(x)=f(x)$ 的基本解 $E(x)=H(x)$

$u'(x)+au=f(x)$ 的基本解 $E(x)=\mathrm{e}^{-ax}H(x)$

$u''(x)+a^2u(x)=f(x)$ 的基本解 $E(x)=\dfrac{\sin ax}{a}H(x)$

$u^{(n)}(x)=f(x)$ 的基本解 $E(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}H(x)$

例2 调和方程的基本解

设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，由于

$$\Delta_3\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x,y,z)$$

所以三维调和方程的基本解为

$$E(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$$

它的物理意义可解释为在原点的单位正电荷在自由空间产生的电位是 $\dfrac{1}{r}$，此基本解满足当 $|x|\to\infty$ 时，$E\to 0$ 这一特定的条件，物理上解释为在无穷处电位为零.

数学上求出三维调和方程的基本解也有一些分析的方法，其

一是根据问题的对称性，即在自变量的旋转变换下方程的不变性，可设

$$E(x, y, z) = E(r)$$

所以当 $r \neq 0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = 0$$

$E(r) = c_1 + c_2 \dfrac{1}{r}$，舍去在全空间调和方程的解 c_1，取 $E(r) = c \dfrac{1}{r}$. 又由于根据 Gauss 公式，对于任意 $\varphi(x, y, z) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，$(0, 0, 0) \in \Omega$，均有

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{r}\Delta\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -4\pi\varphi(0, 0, 0) + \oiint_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

所以得

$$E = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$$

另一种求 $E(x, y, z)$ 的方法是利用三维的 Fourier 变换，由

$$\Delta E = \delta(x, y, z)$$

作三元的 Fourier 变换得

$$-\rho^2 \hat{E}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1$$

其中 $\rho^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$，$\hat{E}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 为 $E(x, y, z)$ 的 Fourier 变换，所以

$$\hat{E}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\frac{1}{\rho^2}$$

$$E(x, y, z) = F^{-1}\left[-\frac{1}{\rho^2}\right] = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$$

设 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，类似的可得二维调和方程

$$\Delta_2 u(x, y) = 0$$

的基本解为

$$E(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

设 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，类似的可得 n 维调和方程

$$\Delta_n u(x)=0$$

的基本解

$$E(x)=-\frac{1}{S_1(n)}\frac{1}{r^{n-2}}\qquad(n\geqslant 3)$$

其中

$$S_1(n)=\frac{2(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\pi^{\frac{n}{2}}$$

表示 n 维空间 R^n 中的单位球面的面积.

调和方程的基本解只有唯一的奇点，在除去此奇点的区域内它们均为调和方程的古典解.

例 3 Helmholtz 方程的基本解.

类似于三维调和方程的情况可求得三维 Helmholtz 方程

$$\Delta_3 u+k^2u=0$$

的基本解为

$$-\frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}\text{ 或 }-\frac{1}{4\pi r}e^{ikr}\text{ 或 }-\frac{1}{4\pi r}\cos kr$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 通常取基本解为

$$E(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}$$

它在 $r\to\infty$ 时满足

$$E=O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}+ikrE=o\left(\frac{1}{r}\right)$$

其中第二个条件通常称之为向外幅射条件.

类似地，二维 Helmholtz 方程的基本解为

$$E=\frac{1}{4}N_0(kr)$$

例 4 热传导方程的基本解.

由

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2\Delta_n E = \delta(x)\delta(t)$$

相对于空间变量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对相关函数作 Fourier 变换可得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{E}(\lambda, t)}{\mathrm{d}t} + a^2\rho^2\hat{E}(\lambda, t) = \delta(t)$$

其中 $\rho^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$.

$$\hat{E}(\lambda, t) = \mathrm{e}^{-a^2\rho^2 t}H(t)$$

$$\begin{aligned} E(x, t) &= F^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\rho^2 t}]\cdot H(t) \\ &= \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{4a^2 t}}H(t) \end{aligned}$$

基本解 $E(x, t)$ 也只有唯一的一个奇点为原点.

例 5 波动方程的基本解.

由

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2\Delta_n E = \delta(x)\delta(t)$$

相对于空间变量作相关函数的 Fourier 变换得

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{E}(\lambda, t)}{\mathrm{d}t^2} + a^2\rho^2\hat{E}(\lambda, t) = \delta(t)$$

$$\hat{E}(\lambda, t) = \frac{\sin a\rho t}{a\rho}H(t)$$

$$E(x, t) = F^{-1}\left[\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right]H(t)$$

所以，当 $n=1$ 时，

$$E(x_1, t) = \frac{1}{2a}H(a^2t^2 - x_1^2)H(t)$$

$E(x_1, t)$ 的支集在 $t\geqslant 0$ 中两特征线所围成的角形域上，$E(x_1, t)$ 在 $t\geqslant 0$ 中的两特征线 $a^2t^2 - x_1^2 = 0$ 上发生了间断.

$n=2$ 时，

$$E(x_1, x_2, t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}H(a^2t^2-r^2)H(t)$$

其中 $r^2=x_1^2+x_2^2$，它在 $t\geqslant 0$ 中的特征锥面 $a^2t^2-r^2=0$ 上发生间断，支集在特征锥上.

$n=3$ 时，

$$E(x_1, x_2, x_3, t)=\frac{1}{4\pi ar}\delta(r-at)H(t)$$

它的支集只在 $t\geqslant 0$ 中的特征锥面 $r^2-a^2t^2=0$ 上.

$n>3$ 时，其基本解会发生更大的奇异性.

4.3.2 常系数线性偏微分方程初值问题的基本解

设初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}=L[u],\ t>0,\ x\in R^n\\ u|_{t=0}=\varphi_0(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),\cdots,\dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0}=\varphi_{m-1}(x)\end{cases}\tag{3}$$

其中 L 是一个只含对 x 的偏导数的常系数线性微分算子. 若 $U(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m U(x,t)}{\partial t^m}=L[U],\ t>0,\ x\in R^n\\ U|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\ \cdots,\ \dfrac{\partial^{m-2}U}{\partial t^{m-2}}\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial^{m-1}U}{\partial t^{m-1}}=\delta(x)\end{cases}$$

则称 $U(x,t)$ 为初值问题(3)的基本解. 在这里 $U(x,t)$ 是含时间参数 t 的广义函数.

不难验证，若 $U(x,t)$ 存在，则问题(3)的解可以表示为

$$u(x,t)=U(x,t)*\varphi_{m-1}(x)+\frac{\partial}{\partial t}(U(x,t)*\varphi_{m-2}(x))+\cdots+\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}(U(x,t)*\varphi_0(x))$$

在上述的论述中并不保证初值问题的基本解一定存在，初值问题的基本解的存在性和方程的类型有关.

如果初值问题(3)的基本解 $U(x, t)$ 存，那么方程

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} - L[u] = 0$$

的支集在 $t \geqslant 0$ 中的基本解为

$$E(x, t) = U(x, t)H(t) = \begin{cases} U(x, t) & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

这和常微分方程的情况类似.

例 1　热传导方程初值问题的基本解.

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta_n U & t > 0, \ x \in R^n \\ U|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$$

相对于空间变量 x 作 n 元 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\hat{U}(\lambda, t)}{\mathrm{d}t} = - a^2 \rho^2 \hat{U} \\ U|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

所以

$$\hat{U}(\lambda, t) = \mathrm{e}^{-a^2 \rho^2 t}$$

$$U(x, t) = F^{-1}[\rho^{-a^2 \rho^2 t}]$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{4a^2 t}}$$

所以初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_n u & t > 0, \ x \in R^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解为

$$u(x, t) = U(x, t) * \varphi(x)$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{R^n}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}{4a^2t}}d\xi$$

这就是前边已得到过的 Poisson 公式.

例 2　波动方程初值问题的基本解.

由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\Delta_n U \quad t > 0, \ x \in R^n \\ U|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$$

相对于空间变量 x 对相关函数作 n 元 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\hat{U}(\lambda, t)}{dt^2} = -a^2\rho^2\hat{U}(\lambda, t) \\ \hat{U}|_{t=0} = 0, \ \dfrac{d\hat{U}}{dt}\Big|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

所以

$$\hat{U}(\lambda, t) = \frac{\sin a\rho t}{a\rho}$$

$$U(x, t) = F^{-1}\left[\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\right]$$

$n = 1$ 时,

$$U(x_1, t) = \frac{1}{2a}H(a^2t^2 - x_1^2)$$

所以

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\ u|_{t=0} = \varphi(x_1), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x_1) \end{cases}$$

的解为

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(U(x_1, t) * \varphi(x_1)) + U(x_1, t) * \psi(x_1)$$

$$= \frac{\varphi(x_1 - at) + \varphi(x_1 + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_1 - at}^{x_1 + at} \psi(\xi_1) \mathrm{d}\xi_1$$

这就是 D' Alembert 公式.

$n = 2$ 时,

$$U(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} H(a^2t^2 - r^2)$$

其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$，这时在用 Fourier 变换的反演公式得出 $U(x_1, x_2, t)$ 时需进行较繁一点的演算. 由此可得出二维波动方程一般初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 v \quad t > 0, \ x \in R^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解的 Poisson 公式

$$u(x, t) = U(x, t) * \psi(x) + \frac{\partial}{\partial t}(U(x, t) * \varphi(x))$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \iint_{D_x^{at}} \psi(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_x^{at}} \varphi(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2$$

其中 D_x^{at} 表示以点 $x = (x_1, x_2)$ 为中心，at 为半径的圆域.

$n = 3$ 时，这时需按广义函数 Fourier 变换的意义和运算来求出 $\hat{U}(\lambda, t)$ 的原函数 $U(x, t)$，即

$$U(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{R^3} \frac{\sin a\rho t}{a\rho} e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 +)} \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \mathrm{d}\lambda_3$$

由于对称性可设参点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 位于 λ_3 轴上的点 $(0, 0, r)$，$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$，应用球坐标 (ρ, θ, φ) 得

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \frac{1}{(2\pi a)^3}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}e^{i\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}\sin r\rho\sin a\rho t\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{4\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}[\cos(r-at)\rho-\cos(r+at)\rho]\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{4\pi ar}[\delta(r-at)-\delta(r+at)] \\
&= \frac{1}{4\pi ar}\delta(r-at)
\end{aligned}
$$

由此可得出一般的三维波动方程初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 u \quad t>0,\ x\in R^3 \\
u|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)
\end{cases}
$$

的解为

$$
u(x,t) = \psi(x)*U(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(x)*U(x,t))
$$

由于

$$
\psi(x)*U(x,t) = \frac{1}{4\pi a}\int_{R^3}\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\frac{\delta(r-at)}{r}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3
$$

其中 $r=\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}$. 以 S_x^r 表示 (x_1, x_2, x_3) 为中心，r 为半径的球面，利用球坐标，则

$$
\begin{aligned}
\psi(x)*U(x,t) &= \frac{1}{4\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(r-at)}{r}\iint_{S_x^r}\psi\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi a}\cdot\frac{1}{at}\iint_{S_x^{at}}\psi\mathrm{d}s \\
&= tM_x^{at}[\psi]
\end{aligned}
$$

其中 $M_x^{at}[\psi]$ 表示函数 ψ 在以 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 为中心 at 为半径的球面上的平均值，所以得

$$u(x, t) = tM_x^{at}[\psi] + \frac{\partial}{\partial t}[tM_x^{at}[\varphi]]$$

对于更一般的常系数方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} = L[u] + \dfrac{\partial}{\partial t}L_1[u] + \cdots + \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}L_{m-1}[u], t > 0, x \in R^n \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \cdots, \left.\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^m}\right|_{t=0} = \varphi_{m-1}(x) \end{cases}$$

其中 $L, L_1, \cdots, L_m$ 为只含关于自变量 x 的偏导数的常系数微分算子，其基本解 $U(x, t)$ 的定义是相同的，但这时上述初值问题的解一般可以表为

$$u(x, t) = f_{m-1}(x) * U(x, t) + \frac{\partial}{\partial t}[f_{m-2}(x) * U(x, t)] + \cdots + \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}[f_0(x) * U(x, t)]$$

其中 $f_i(x)$ 需由初始条件和方程用下列各式递推地确定

$$\begin{cases} f_0(x) = \varphi_0(x) \\ f_1(x) + f_0(x) * \dfrac{\partial^m U(x, 0)}{\partial t^m} = \varphi_1(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-2}(x) + f_{m-3}(x) * \dfrac{\partial^m U(x, 0)}{\partial t^m} + \cdots + f_0(x) * \dfrac{\partial^{2m-3} U(x, 0)}{\partial t^{2m-3}} = \varphi_{m-2}(x) \\ f_{m-1}(x) + f_{m-2}(x) * \dfrac{\partial^m U(x, 0)}{\partial t^m} + \cdots + f_0(x) * \dfrac{\partial^{2m-2} U(x, 0)}{\partial t^{2m-2}} = \varphi_{m-1}(x) \end{cases}$$

例如：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x} + b \dfrac{\partial u}{\partial t} + c \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{d}u, \ t > 0, \ x \in R^1 \\
u|_{t=0} = \varphi_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x)
\end{cases}
$$

则

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}[\varphi_0(x) * U(x,t)] + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x) * b\delta(x)] * U(x,t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}[\varphi_0(x) * U(x, t)] + [\varphi_1(x) - b\varphi_0(x)] * U(x, t)
\end{aligned}
$$

其中 $U(x, t)$ 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial U}{\partial t} + c \dfrac{\partial U}{\partial x} + \mathrm{d}U \\
U|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \delta(x)
\end{cases}
$$

4.3.3 混合问题的基本解

类似于初值问题的基本解可定义混合问题的基本解，以例说明.

设混合问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t > 0, \ 0 < x < l \\
u|_{t=0} = \varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \\
u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=l} = 0
\end{cases}
\tag{4}
$$

若 $U(x, t; \xi)$ 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ t > 0, \ x, \xi \in (0, l) \\
U|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \delta(x - \xi) \\
U|_{x=0} = 0, \ U|_{x=l} = 0
\end{cases}
$$

则称 $U(x, t; \xi)$ 为混合问题(4)的基本解，应用分离变量法或有

限正弦变换可得

$$U(x, t; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{an\pi} \sin \frac{n\pi}{l}\xi \sin \frac{n\pi a}{l}t \sin \frac{n\pi}{l}x$$

这时(4)的解为

$$u(x, t) = \int_0^l U(x, t; \xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l U(x, t; \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

即

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n \frac{l}{n\pi a}\sin \frac{n\pi a}{l}t + \varphi_n \cos \frac{n\pi a}{l}t\right]\sin \frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin \frac{n\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin \frac{n\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi$$

习　题　四

内容包括：用 Fourier 变换、Fourier 正弦和余弦变换及 Laplace 变换解题，广义函数和方程的基本解，初值问题和混合问题的基本解，初值问题的基本解和方程的基本解的关系.

1. 应用 FT 解题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} + cu \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ y > 0 \\ u|_{y=0} = \dfrac{\sin x}{x} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = 0, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases}$

($F^{-1}\left[\dfrac{\sin at\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{a\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\right] = \dfrac{1}{2\pi a}\dfrac{1}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}H(a^2t^2 - r^2)$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

(6) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2 y \end{cases}$

2. 应用 F_sT 或 F_cT 或 LT 解题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \ t > 0, \ x > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 u, \ t > 0, \ x > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t > 0, \ x > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\Big|_{x=0} = g(t) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c^2 u = 0, \ x > 0, \ y > 0 \\ u|_{y=0} = 0 \\ u|_{x=0} = g(y) \end{cases}$

$$g(0)=0,\ L^{-1}\left(\frac{1}{P}e^{-\frac{c^2}{P}x}\right)=\frac{1}{2}J_0(2c\sqrt{xy})$$

(5) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2b\dfrac{\partial u}{\partial t}-b^2u,\ t>0,\ x>0\\ u|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=0\\ u|_{x=0}=g(t)\end{cases}$$

(6) $$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\ x>0,\ y>0\\ u|_{y=0}=f(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0\end{cases}$$

3. 应用交换积分顺序和广义函数的运算直接验证

(1) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi=f(x)$$

(2) $$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x d\lambda\int_0^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=f(x)$$

(3) $$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda x d\lambda\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=f(x)$$

4. 直接验证下列方程的基本解

(1)验证 $\frac{1}{2a}H(a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2)H(t-\tau)$ 满足

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\delta(x-\xi,t-\tau)$$

(2)验证 $\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}H(t-\tau)$ 满足

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\delta(x-\xi,t-\tau)$$

(3)验证(2)中的函数，当作为 (ξ,τ) 的函数时满足

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=-\delta(\tau-t,\xi-x)$$

5. 求下列方程的基本解

(1) $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$

6. 根据调和方程的基本解，求出二维和三维重调和方程的基本解，即求下列方程的解

(1) $\Delta_2(\Delta_2 U) = \delta(x, y)$

(2) $\Delta_3(\Delta_3 U) = \delta(x, y, z)$

7. 先求下列初值问题的基本解，再写出方程的基本解，写出初值问题解的积分表达式

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x, t),\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} + cu,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b\dfrac{\partial u}{\partial t} - b^2 u \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + u \\ u|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

$$\left(F^{-1}\left[\frac{\sin a\sqrt{\lambda^2 + b}}{\sqrt{\lambda^2 + b}}\right] = \frac{1}{2}J_0(\sqrt{b}\sqrt{a^2 - x^2})H(a^2 - x^2),\ a > 0\right)$$

(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u + b\dfrac{\partial u}{\partial x} + cu \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ u|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases}$

8. 求混合问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + f(x, t), t > 0, 0 < x < l \\
u|_{t=0} = \varphi(x) \\
u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0
\end{cases}
$$

的基本解 $U(x, \xi, t)$，并用它来表示上述问题的解.

5 共轭算子法和 Green 函数

*5.1 常微分方程边值问题及其格林函数

5.1.1 常微分方程边值问题和共轭边值问题

设边值问题

$$\begin{cases} L[u] = a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u \\ \qquad = f(x),\ a < x < b \\ l_1[u] = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = u_1 \\ l_2[u] = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = u_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_2(x) \neq 0$，$a_i(x)$ 充分光滑，$\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$，$i = 1, 2$.

常微分方程的边值问题和初值问题有很大的不同，初值问题的解总是存在唯一的，而边值问题(1)则不然，其最基本的结论是：

如果问题(1)的解唯一，即对应的齐次问题只有零解，则对于任意的右端 $f(x)$ 和边值 u_1 和 u_2 问题(1)的解总是存在的，它的解可由方程的通解和边值条件来唯一的确定. 但如果齐次问题有非零解，那么 $f(x)$ 和边界值 u_1 和 u_2 还需满足某种相容性条件时问题(1)才有解，而当相容性条件满足时，问题(1)的解一定不是唯一的，它们可以相差齐次问题的任意一个非零解，边值问题的这种性质类似于有限维空间中的线性代数方程组.

设 L^* 是 L 的共轭微分算子，即

$$L^*[v] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(a_2(x)v(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_1(x)v(x)) + a_0(x)v$$

则有基本的微分恒等式

$$v(x)L[u(x)]-u(x)L^*[v(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x),v(x)]$$

其中

$$[u(x),v(x)]=a_2(x)v(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}-u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_2(x)v(x))+a_1(x)u(x)v(x)$$

所以得基本的积分关系式

$$\int_a^b[vL[u]-u\,L^*(v)]\,\mathrm{d}x=[u(x),v(x)]|_a^b$$

如果 $u(x), v(x)\in C^2(a,b)\cap C^1[a,b]$，且满足齐次边界条件

$$\begin{cases} l_1[u]=\alpha_1 u(a)+\beta_1 u'(a)=0\\ l_2[u]=\alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{l}_1[v]=\bar{\alpha}_1 v(a)+\bar{\beta}_1 v'(a)=0\\ \bar{l}_2[v]=\bar{\alpha}_2 v(b)+\bar{\beta}_2 v'(b)=0\end{cases}$$

使得

$$[u(x),v(x)]|_a^b=0$$

即

$$\int_a^b v(x)L[u]\mathrm{d}x=\int_a^b uL^*[v]\mathrm{d}x$$

则称边界条件 $\bar{l}_1$ 和 $\bar{l}_2$ 为 l_1，l_2 的共轭边界条件，而称边界问题

$$\begin{cases} L^*[v]=g(x)\\ \bar{l}_1[v]=v_1\\ \bar{l}_2=v_2\end{cases}\tag{1*}$$

为(1)的共轭边值问题，这时(1)也是(1*)的共轭边值问题，互为共轭的一对边值问题(1)和(1*)是紧密相连的，通常一起加以讨论．例如若对应于(1)的齐次问题只有零解，那么对应于(1*)的齐次问题也只有零解．

如果 $L = L^*$，$l_1 = \bar{l}_1$，$l_2 = \bar{l}_2$，则称问题(1)是自共轭的边值问题，例如

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)u = f(x) \\ l_1[u] = u_1,\ l_2[u] = u_2 \end{cases} \tag{2}$$

是自共轭的问题.

5.1.2 边值问题的 Green 函数

若 $G(x, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} L^*[G] = \delta(x-\xi),\ a < x,\ \xi < b \\ \bar{l}_1[G_1] = 0,\ \bar{l}_2[G] = 0 \end{cases}$$

则称 $G(x, \xi)$ 为边值问题(1)的 Green 函数.

若 $U(x, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} L[U] = \delta(x-\xi) \\ l_1[U] = 0,\ l_2[U] = 0 \end{cases}$$

则称 $U(x, \xi)$ 为边值问题(1^*)的 Green 函数.

若问题(1)对应的齐次问题只有零解，则问题(1^*)对应的齐次问题也只有零解，这时 Green 函数 $G(x, \xi)$ 和 $U(x, \xi)$ 总是存在唯一的，且除了点 $x = \xi$ 外它们分别满足齐次方程，且在 $x = \xi$ 保持连续，而一阶导数有第一类的间断，其跃度为 $\dfrac{1}{a_2(\xi)}$. 而在端点 $x = a$ 和 $x = b$ 分别满足相应的齐次边界条件. 根据这些性质可以确定得 $G(x, \xi)$ 和 $U(x, \xi)$，且可以证明

$$G(x, \xi) = U(\xi, x)$$

即若 $G(x, \xi)$ 是(1)的 Green 函数，则把 ξ 视为自变量、x 视为参数时，$G(x, \xi)$ 就是共轭问题(1^*)的 Green 函数. 事实上，任取 ξ_1，$\xi_2 \in (a, b)$，不妨设 $\xi_1 < \xi_2$，则一方面

$$I = \int_a^b \{G(x, \xi_1)L[U(x, \xi_2)] - U(x, \xi_2)L^*[G(x, \xi_1)]\}\mathrm{d}x = 0$$

另一方面利用分部积分公式

$$I=[U(x,\xi_2),G(x,\xi_1)]\Big|_a^{\xi_1}+[U(x,\xi_2),G(x,\xi_1)]\Big|_{\xi_1}^{\xi_2}$$
$$+[U(x,\xi_2),G(x,\xi_1)]\Big|_{\xi_2}^{b}$$
$$=-G(\xi_2,\xi_1)+U(\xi_1,\xi_2)+[U(x,\xi_2),G(x,\xi_1)]\Big|_a^b$$
$$=-G(\xi_2,\xi_1)+U(\xi_1,\xi_2)$$

所以

$$G(\xi_2,\xi_1)=U(\xi_1,\xi_2)$$

即

$$G(x,\xi)=U(\xi,x)$$

上述较严格的推导证明过程可用下列较为形式的推导过程而得出相同的结果，即一方面

$$I=\int_a^b\{G(x,\xi_1)L[U(x,\xi_2)]-U(x,\xi_2)L^*(G(x,\xi_1))\}\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\{G(x,\xi_1)\delta(x-\xi_2)-U(x,\xi_2)\delta(x-\xi_1)\}\mathrm{d}x$$
$$=G(\xi_2,\xi_1)-U(\xi_1,\xi_2)$$

而另一方面形式地直接应用分部积分公式

$$I=[U(x,\xi_2),G(x,\xi_1)]\Big|_a^b=0$$

所以

$$G(\xi_2,\xi_1)=U(\xi_1,\xi_2)$$

若设 $u(x)$ 是边值问题(1)的解，$G(x,\xi)$ 是(1)的格林函数，则一方面

$$I_1=\int_a^b\{G(x,\xi)L[u]-uL^*(G(x,\xi))\}\mathrm{d}x=\int_a^b G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x$$

另一方面应用分部积分公式

$$I_1=[u(x),G(x,\xi)]\Big|_a^{\xi}+[u(x),G(x,\xi)]\Big|_{\xi}^{b}$$
$$=[u(x),G(x,\xi)]\Big|_a^b+u(\xi)$$

所以得

$$u(\xi)=\int_a^b G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x-[u(x),G(x,\xi)]\Big|_a^b$$

即通过 Green 函数，把问题(1)的解表示出来. 特别，如果 l_1 和 l_2 均为第一类边界条件 $u(a)=u_1$ 和 $u(b)=u_2$，则它们的共轭边界条件也是第一类的，所以 $G(a,\xi)=0$, $G(b,\xi)=0$，则得

$$u(\xi)=\int_a^b G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x+u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_2(x)G(x,\xi))\Big|_a^b$$

或者

$$\begin{aligned}u(x)&=\int_a^b G(\xi,x)f(\xi)\mathrm{d}\xi+u(\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(a_2(\xi)G(\xi,x))\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\\&=\int_a^b U(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+u(\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(a_2(\xi)U(x,\xi))\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\end{aligned}$$

设 $L^*[v]=0$ 的基解组为 $v_1(x)$ 和 $v_2(x)$，则可令

$$G(x,\xi)=\begin{cases}A_1(\xi)v_1(x)+A_2(\xi)v_2(x) & a\leqslant x<\xi\\ B_1(\xi)v_1(x)+B_2(\xi)v_2(x) & \xi<x<B\end{cases}$$

则由

$$\begin{cases}\bar{l}_1[G]=0\\ \bar{l}_2[G]=0\\ G(\xi+0,\xi)=G(\xi-0,\xi)\\ G'(\xi+0,\xi)-G'(\xi-0,\xi)=\dfrac{1}{a_2(\xi)}\end{cases}$$

确定 $A_i(\xi)$ 和 $B_i(\xi)$，从而得出 $G(x,\xi)$.

5.1.3 边值问题有解的相容性条件

设边值问题(1)对应的齐次问题有非零解，这时共轭边值问题(1^*)对应的齐次问题也必有非零解，此时上述的 Green 函数 $G(x,\xi)$, $U(x,\xi)$ 并不存在.

设 $v(x)$ 是齐次问题

$$\begin{cases}L^*[v]=0\\ \bar{l}_1[v]=0,\ \bar{l}_2[v]=0\end{cases}$$

的任意一个非零解，又设 $u(x)$ 是边值问题(1)的解，则由

$$\int_a^b \{vL[u] - u(x)L^*[v]\}\mathrm{d}x = \int_a^b v(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \{vL[u] - u(x)L^*[v]\}\mathrm{d}x = [u(x),\ v(x)]|_a^b$$

所以得

$$\int_a^b v(x)f(x)\mathrm{d}x = [u(x),\ v(x)]|_a^b$$

这就是问题(1)有解的相容性条件. 特别如果问题(1)的边界条件也是齐次边界条件时，则问题(1)有解的相容性条件就是正交性条件

$$\int_a^b v(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$$

5.1.4 自共轭边值问题 Green 函数举例

设自共轭边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)u = f(x),\ a < x < b \\ l_1[u] = u_1,\ l_2[u] = u_2 \end{cases}$$

它的 Green 函数为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}G(x,\ \xi)}{\mathrm{d}x}\right) - q(x)G(x,\ \xi) = \delta(x-\xi) \\ l_1[G] = 0,\ l_2[G] = 0 \end{cases}$$

由于自共轭性，所以必有

$$G(x,\ \xi) = G(\xi,\ x) = U(x,\ \xi)$$

而问题(2)的解可以表为

$$u(x) = \int_a^b G(x,\ \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi - [u(\xi),\ G(x,\ \xi)]|_{\xi=a}^{\xi=b}$$

其中

$$[u(\xi),\ G(x,\ \xi)] = k(\xi)\left(G\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - u\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\right)$$

例 1 $\begin{cases} u'' = f(x),\ 0 < x < 1 \\ u(0) = u_1,\ u(1) = u_2 \end{cases}$

由于齐次方程的基解组为 1，x，可令

$$G(x,\ \xi) = \begin{cases} A_1(\xi) + A_2(\xi)x,\ 0 \leqslant x < \xi \\ B_1(\xi) + B_2(\xi)x,\ \xi \leqslant x < 1 \end{cases}$$

又由

$$G|_{x=0} = 0,\ G|_{x=1} = 0$$
$$G(\xi + 0,\ \xi) = G(\xi - 0,\ \xi),$$
$$G'(\xi + 0,\ \xi) - G'(\xi - 0,\ \xi) = 1$$

得

$$G(x,\ \xi) = \begin{cases} (\xi - 1)x,\ 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \xi(x - 1),\ \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

例 2 $\begin{cases} u'' = f(x),\ 0 < x < 1 \\ u(0) = u_1,\ u'(1) = u_2 \end{cases}$

类似于例 1，可得

$$G(x,\ \xi) = \begin{cases} -x,\ 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ -\xi,\ \xi \leqslant x < 1 \end{cases}$$

例 3 $\begin{cases} xu'' + u' = f(x),\ 0 < x < 1 \\ u(0)\ \text{有界},\ u(1) = u_2 \end{cases}$

由于齐次方程的基解组为 1，$\ln x$，可令

$$G(x,\ \xi) = \begin{cases} A_1(\xi) + A_2(\xi)\ln x,\ 0 < x \leqslant \xi \\ B_1(\xi) + B_2(\xi)\ln x,\ \xi < x < 1 \end{cases}$$

又由

$$G|_{x=0}\ \text{有界},\ G|_{x=1} = 0$$
$$G(\xi + 0,\ \xi) = G(\xi - 0,\ \xi),$$
$$G'(\xi + 0,\ \xi) - G'(\xi - 0,\ \xi) = \frac{1}{\xi}$$

得

$$G(x,\ \xi) = \begin{cases} \ln\xi,\ 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \ln x,\ \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

例 4 $\begin{cases} u'' = f(x),\ 0 < x < 1 \\ u'(0) = u_1,\ u'(1) = u_2 \end{cases}$

由于这时齐次问题有非零解 1，所以首先要满足相容性性条件问题才有解，由于

$$\int_0^1 u''(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 u''(x)\mathrm{d}x = u'(x)\big|_0^1 = u_2 - u_1$$

所以问题有解的相容性条件是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = u_2 - u_1$$

当相容性条件满足时，问题有解，但解不唯一，解可以相差任意一个非零常数.

这时普通的格林函数 $G(x,\xi)$ 不存在，即

$$\begin{cases} G''(x,\xi) = \delta(x-\xi),\ 0 < x,\ \xi < 1 \\ G'\big|_{x=0} = 0,\ G'\big|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

不满足相容性条件，即

$$\int_0^1 \delta(x-\xi)\mathrm{d}x = 1 \neq 0$$

所以通常需定义广义的 Green 函数 $E(x,\xi)$，它满足：

$$\begin{cases} E''(x,\xi) = \delta(x-\xi) - 1,\ 0 < x,\ \xi < 1 \\ E'\big|_{x=0} = 0,\ E'\big|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

这时相容性条件成立，即

$$\int_0^1 [\delta(x-\xi) - 1]\,\mathrm{d}x = 1 - 1 = 0$$

由于方程 $u''(x) = -1$ 的通解为 $c_1 + c_2 x - \dfrac{x^2}{2}$，可令

$$E(x,\xi) = \begin{cases} A_1(\xi) + A_2(\xi)x - \dfrac{x^2}{2},\ 0 < x < \xi \\ B_1(\xi) + B_2(\xi)x - \dfrac{x^2}{2},\ \xi \leqslant x < 1 \end{cases}$$

再由

$$E'|_{x=0}=0,\ E'|_{x=1}=0$$

$$E(\xi+0,\xi)=E(\xi-0,\xi)$$

$$E'(\xi+0,\xi)-E'(\xi-0,\xi)=1$$

可得

$$E(x,\xi)=\begin{cases} c+\xi-\dfrac{x^2}{2},\ 0<x\leqslant\xi \\ c+x-\dfrac{x^2}{2},\ \xi\leqslant x<1 \end{cases}$$

其中 c 是任意取定的一个常数，例如取 $c=0$.

这时，如果例 4 中当 $f(x)$ 和 u_2，u_1 满足相容性条件时，则它的解也可由广义的 Green 函数 $E(x,\xi)$ 表出：

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_0^1 E(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x-[u'(x)E(x,\xi)-u(x)E'(x,\xi)]|_0^1+c \\ &= \int_0^1 E(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x-E(0,\xi)u_1-E(1,\xi)u_2+c \\ &= \int_0^\xi(\xi-\frac{x^2}{2})f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^1(x-\frac{x^2}{2})f(x)\mathrm{d}x+\xi u_1-\frac{1}{2}u_2+c \end{aligned}$$

5.1.5 微分方程固有值问题和积分方程固有值问题的等价性

设自共轭的固有值问题

$$\begin{cases} L[u]=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)u=\lambda\rho(x)u(x),\ a<x<b \\ l_1[u]=0,\ l_2[u]=0 \end{cases} \tag{3}$$

如果 $\lambda=0$ 不是它的固有值，则

$$\begin{cases} L[u]=f(x),\ a<x<b \\ l_1[u]=u_1,\ l_2[u]=u_2 \end{cases}$$

的格林函数 $G(x,\xi)$ 存在，所以微分方程的固有值问题(3)等价于积分方程的固有值问题

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

即需求使上述积分方程有非零解的 λ 的值(固有值)和对应的非零解(固有函数).

类似的，通过格林函数可以把微分方程的边值问题化为等价的积分方程的问题. 例如，设

$$\begin{cases} u'' = f(x),\ a < x < b \\ l_1[u] = u_1,\ l_2[u] = u_2 \end{cases}$$

的格林函数为 $G(x, \xi)$，则边值问题

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = f(x),\ a < x < b \\ l_1[y] = 0,\ l_2[y] = 0 \end{cases}$$

等价于积分方程

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_a^b G(x, \xi)q(\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi$$

即

$$y(x) = h(x) + \int_a^b G(x, \xi)q(\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi$$

其中 $y(x)$ 是需求的未知函数，其它的函数是已知的.

5.2 偏微分方程边值问题及其格林函数

可以把二阶线性常微分方程边值问题的有关概念和理论推广到二阶线性椭圆型偏微分方程的边值问题中，类似的可以定义互为共轭的边值问题，定义 Green 函数，通过 Green 函数表示一般的边值问题的解，讨论边值问题解的存在唯一性及相容性条件，讨论通过Green 函数把偏微分方程的边值问题化为积分方程的问题等等. 本节着重讨论两个自变量或三个自变量的常系数线性二阶椭圆型方程的边值问题，它的标准形式就是调和方程或 Helmholtz 方程的边值问题.

5.2.1 三维调和方程第一边值问题及其 Green 函数

设

$$
\begin{cases}\Delta_3 u = f(x),\ x \in \Omega \subset R^3 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi\end{cases} \tag{1}
$$

其中 Ω 是 R^3 中某一光滑的区域，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，f 和 φ 是充分光滑的函数．这种定解问题的解是存在唯一的．

由于调和算子是自共轭的，当 $u(x),\ v(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，且在边界上满足齐次条件 $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$ 时，

$$
\iiint\limits_{\Omega} (v\Delta_3 u - u\Delta_3 v)\mathrm{d}x = \oiint\limits_{\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s = 0
$$

即

$$
\iiint\limits_{\Omega} v\Delta_3 u \mathrm{d}x = \iiint\limits_{\Omega} u\Delta_3 v \mathrm{d}x
$$

所以问题(1)是自共轭的边值问题．

若 $G(x,\ \xi)$ 满足

$$
\begin{cases}\Delta_3 G = \delta(x - \xi),\ x,\ \xi \in \Omega \\ G|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}
$$

则称 $G(x,\ \xi)$ 是问题(1)的 Green 函数．它是一种特殊的基本解，其物理意义可解释为使边界 $\partial\Omega$ 保持零电位时，Ω 内位于 ξ 点的点电荷在均匀介质 Ω 内的电位分布．

根据调和方程的基本解，Green 函数又可直接的定义为

$$
G(x,\ \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} + g(x,\ \xi)
$$

其中 $r = |x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$，$g(x,\ \xi)$ 满足

$$
\begin{cases}\Delta_3 g(x,\ \xi) = 0 \\ g|_{\partial\Omega} = \left.\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r}\right|_{\partial\Omega}\end{cases}
$$

所以 $G(x,\ \xi)$ 由两部分组成，其一为 $-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r}$，它仅在点 ξ 有较低的奇性，除了点 ξ 外，它满足调和方程，它可解释为位于点 ξ 的点电荷在自由空间产生的电位分布．另一部份是 $g(x,\ \xi)$，它

在 Ω 内无奇性且处处满足调和方程，它可解释为感应电荷产生的电位分布，它在边界 $\partial\Omega$ 上的电位和 $\frac{-1}{4\pi r}$ 相对消．根据这种物理解释，对于某些特殊的区域可以把 $g(x, \xi)$ 构造出来，即构造在 Ω 外的某种电荷分布，使它在自由空间产生的电位分布在边界 $\partial\Omega$ 上正好和 $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$ 相对消，称这种方法为电像法．一般而言，$g(x, \xi)$ 由上列的一个特殊的边值问题确定．

由于(1)为自共轭的边值问题和关于 $G(x, \xi)$ 奇性的分析可证明

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

事实上，任取 $\xi, \eta \in \Omega$，则一方面

$$I = \iiint_{\Omega} \{G(x, \xi)\Delta_3 G(x, \eta) - G(x, \eta)\Delta_3 G(x, \xi)\}\mathrm{d}x = 0$$

另一方面根据 G 的奇性分析和 Gauss 公式有

$$\begin{aligned} I = & \oiint_{\partial\Omega}\left\{G(x, \xi)\frac{\partial G(x, \eta)}{\partial n} - G(x, \eta)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n}\right\}\mathrm{d}s \\ & - \lim_{\varepsilon\to 0}\oiint_{\partial B_\varepsilon(\xi)}\left\{G(x, \xi)\frac{\partial G(x, \eta)}{\partial n} - G(x, \eta)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n}\right\}\mathrm{d}s \\ & - \lim_{\varepsilon\to 0}\oiint_{\partial B_\varepsilon(\eta)}\left\{G(x, \xi)\frac{\partial G(x, \eta)}{\partial n} - G(x, \eta)\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n}\right\}\mathrm{d}s \\ = & - G(\xi, \eta) + G(\eta, \xi) \end{aligned}$$

其中 $B_\varepsilon(\xi)$，$B_\varepsilon(\eta)$ 分别表示以 ξ 和 η 为中心 ε 为半径的小球，所以

$$G(\xi, \eta) = G(\eta, \xi)$$

即

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

上述较为严格的推导证明过程可用下列较为形式和简单的推导过程而最终得出相同的结果，即一方面

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\{G(x,\xi)\Delta_3 G(x,\eta)-G(x,\eta)\Delta_3 G(x,\xi)\}\mathrm{d}x$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\{G(x,\xi)\delta(x-\eta)-G(x,\eta)\delta(x-\xi)\}\mathrm{d}x$$

$$=G(\eta,\xi)-G(\xi,\eta)$$

另一方面直接的应用 Gauss 公式得

$$I=\oiint\limits_{\partial\Omega}\left\{G(x,\xi)\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial n}-G(x,\eta)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\right\}\mathrm{d}s$$

$$=0$$

所以

$$G(\xi,\eta)=G(\eta,\xi)$$

这种较直接简单的形式的推导演算过程，在许多教材中经常采用，本教材中有时也采用.

格林函数的对称性又称为互易性，其物理意义是在点 ξ 处的点源在 x 处产生的影响等于在 x 处的点源在 ξ 处的影响.

设 $u(x)$ 是边值问题(1)的解，$G(x,\xi)$ 为(1)的 Green 函数，则一方面由于

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega}\{G(x,\xi)\Delta_3 u-u\Delta_3 G(x,\xi)\mathrm{d}x$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x$$

另一方面应用 Gauss 公式

$$I=\oiint\limits_{\partial\Omega}\left\{G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}\mathrm{d}s-\lim_{\varepsilon\to 0}\oiint\limits_{\partial B_\varepsilon(\xi)}\left\{G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}\mathrm{d}s$$

$$=-\oiint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial G}{\partial n}+u(\xi)$$

所以

$$u(\xi)=\oiint\limits_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s+\iiint\limits_{\Omega}G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x$$

即

$$u(x) = \oiint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \mathrm{d}s_\xi + \iiint_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

特别，当 $f(x) = 0$ 时有

$$u(x) = \oiint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \mathrm{d}s_\xi$$

当 $\varphi = 0$ 时，有

$$u(x) = \iiint_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

设调和方程的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 V + \lambda V = 0, \ x \in \Omega \\ V|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

若 $G(x, \xi)$ 是(1)的 Green 函数，则固有值问题(2)等价于积分方程的固有值问题

$$V(x) = -\lambda \iiint_{\Omega} G(x, \xi) V(\xi) \mathrm{d}\xi$$

若固有值问题(2)的固有值序列为 $\lambda_{n,m,k}$，对应的固有函数系列为 $V_{n,m,k}(x)$，它们构成 Ω 区域上完备的正交系，则可令

$$G(x, \xi) = \sum_n \sum_m \sum_k A_{nmk}(\xi) V_{n,m,k}(x)$$

又由于

$$\delta(x - \xi) = \sum_n \sum_m \sum_k \frac{V_{nmk}(\xi)}{\| V_{nmk}(x) \|^2} V_{n,m,k}(x)$$

把 $G(x, \xi)$ 的展开式代入方程

$$\Delta_3 G(x, \xi) = \delta(x - \delta)$$

可得

$$A_{nmk}(\xi) = \frac{V_{nmk}(\xi)}{\lambda_{nmk} \| V_{nmk}(x) \|^2}$$

所以

$$G(x, \xi) = -\sum_n \sum_m \sum_k \frac{1}{\lambda_{nmk} \| V_{nmk}(x) \|^2} V_{nmk}(\xi) V_{n,m,k}(x)$$

即它是 Green 函数按固有值问题(2)的固有函数系的展开式，从展开式可以明显地看到 $G(x, \xi)$ 的对称性，且有下列关系式

$$\int_{\Omega} G^2(x, \xi)\mathrm{d}x = \sum_n \sum_m \sum_k \frac{v_{n,m,k}^2(\xi)}{\lambda_{nmk}^2 \| v_{nmk}(x) \|^2}$$

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} G^2(x, \xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \sum_n \sum_m \sum_k \frac{1}{\lambda_{nmk}^2}$$

在有些问题中需讨论外部问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = f(x), \ x \in \Omega \text{ 的外部} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u = 0 \end{cases}$$

此外部问题的解也是存在的，类似的定义其 Green 函数，也可用 Green 函数得外部问题解的积分表达式.

例 1 球域第一边值问题及其 Green 函数和 Poisson 公式.

设

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \ r < R \\ u|_{r=R} = \varphi \end{cases}$$

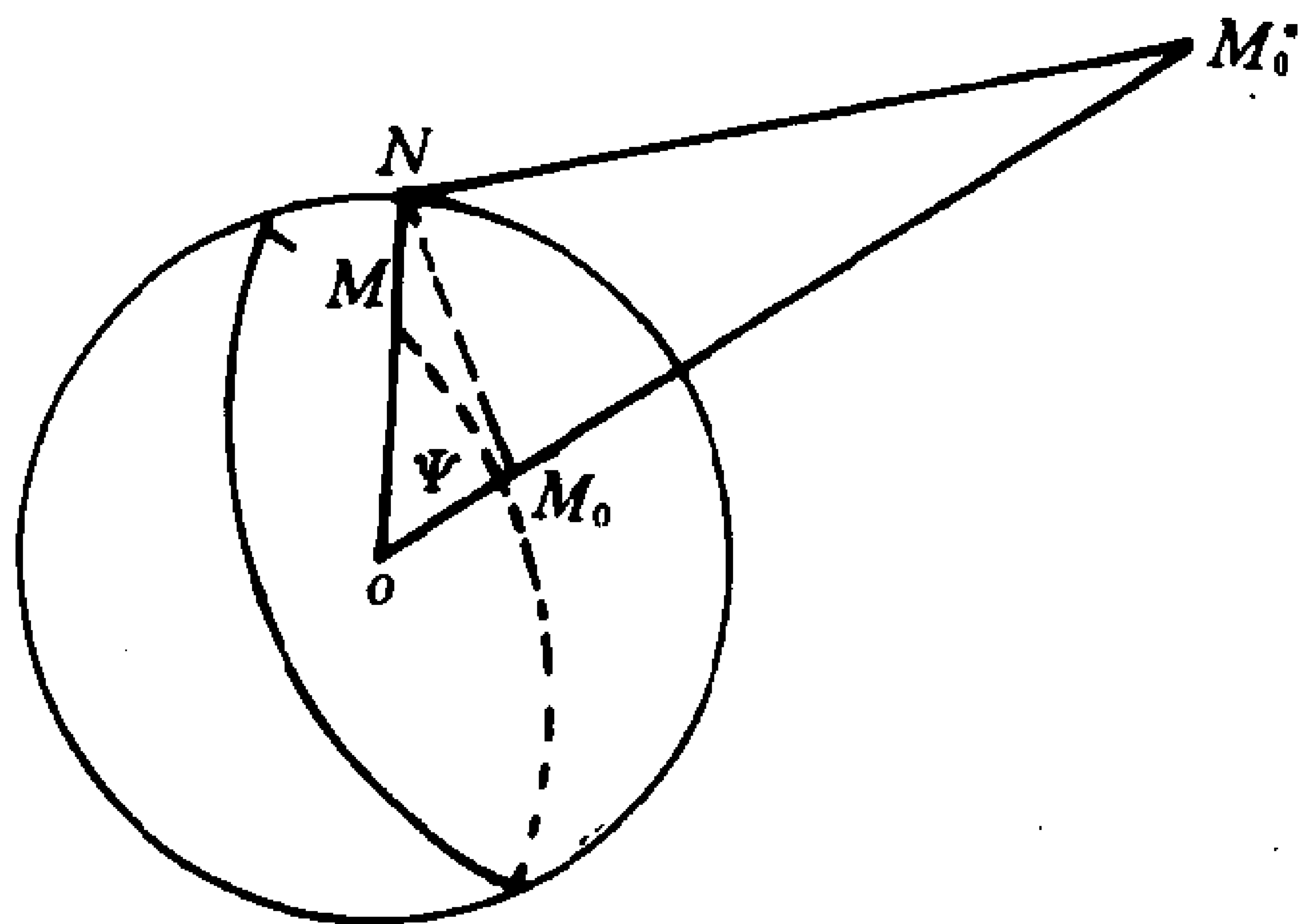


图 5.1

其中 $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

首先用电像法求 Green 函数，如图 5.1 所示，设 $M(x_1, x_2,$

x_3)，$M_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 是球 $B_R(0)$ 内的两个点，

$$\rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},\ r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

M_0^* 是 M_0 关于球面 $r = R$ 的对称点，M_0^* 的坐标为 $\frac{R^2}{\rho^2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，$\overline{OM_0^*} = \rho_1$．目的是试图在 M_0^* 点放置适当大小的点电荷，使它在自由空间产生的电位在球面上的点 N 时恰好和在 M_0 点的点电荷产生的电位 $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{NM_0}}$ 相对消. 应用余弦公式得

$$\begin{aligned} NM_0^* &= \sqrt{R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\psi} \\ &= \frac{R}{\rho}\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi} \\ &= \frac{R}{\rho}NM_0 \end{aligned}$$

所以若设在球内的点 $M_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 置一单位的正电荷，则在 M_0 的对称点 M_0^* 置 $\frac{R}{\rho}$ 的负电荷时，则它们在自由空间产生的电位在球面上正好对消，所以得

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_{MM_0^*}}$$

其中

$$r_{MM_0} = \overline{MM_0} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r\cos\psi}$$

$$r_{MM_0^*} = \overline{MM_0^*} = \sqrt{r^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1 r\cos\psi}$$

而当 M 点在球面 $r = R$ 上时，

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{r=R} &= \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi)^{3/2}} \end{aligned}$$

所以

$$u(\xi) = \frac{1}{4\pi R}\oiint\limits_{r=R}\frac{(R^2 - \rho^2)\varphi(x)}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi)^{3/2}}\mathrm{d}S_x$$

由于对称性，上式可表为

$$u(x)=\frac{1}{4\pi R}\oiint_{\rho=R}\frac{(R^2-r^2)\varphi(\xi)}{(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{3/2}}\mathrm{d}S_\xi$$

这是著名的 Poisson 公式，它表明由调和函数在球面上的值来表示球内点的值. 特别

$$u(0,0,0)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_{\rho=R}\varphi(\xi)\mathrm{d}S_\xi$$

它表明调和函数在球心的值等于它在球面上值的平均值.

如果采用球坐标，x 点球坐标为 (r,θ,φ)，球面上点的球坐标为 (R,θ_0,φ_0)，在球面上的边值为 $\varphi(\theta_0,\varphi_0)$. 则

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(R^2-r^2)}{(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{3/2}}\varphi(\theta_0,\varphi_0)\sin\theta_0\mathrm{d}\varphi_0\mathrm{d}\theta_0$$

其中

$$\cos\psi=\sin\theta_0\sin\theta(\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0)+\cos\theta_0\cos\theta$$

也可把 Green 函数按固有值问题

$$\begin{cases}\Delta_3V+\lambda V=0,\ r<R\\ V|_{r=R}=0\end{cases}$$

的固有函数系展开，即把 $G(x,\xi)$ 按函数系

$$P_n^m(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}J_{n+\frac{1}{2}}(w_{nk}r)$$

展开，其中 $n=0,1,2,\cdots$，$m=0,1,\cdots,n$，w_{nk} 是 $J_{n+\frac{1}{2}}(wR)$ 的第 k 个正根，$\lambda_{nmk}=w_{nk}^2$ 是固有值.

例 2 半空间的第一边值问题及其 Green 函数

$$\begin{cases}\Delta_3u=0,\ x_3>0\\ u|_{x_3=0}=\varphi(x_1,x_2)\end{cases}$$

设 $M(x_1,x_2,x_3)$，$M_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 是上半空间的点，$M_0^*(\xi_1,\xi_2,-\xi_3)$ 是 M_0 点关于坐标平面 $x_3=0$ 的对称点，根据电像法，显然格林函数为

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_0^*}}\right)$$

其中

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

$$r_{MM_0^*} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 + \xi_3)^2}$$

所以在边值 $x_3 = 0$ 上，

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{x_3=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\xi_3}{((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \xi_3^2)^{3/2}}$$

所以

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{\xi_3}{((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \xi_3^2)^{3/2}}\varphi(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

或

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{x_3}{((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2)^{3/2}}\varphi(\xi_1, \xi_2)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

5.2.2 三维调和方程第三边值问题及其 Green 函数

设

$$\begin{cases} \Delta_3 u = f(x),\ x \in \Omega \\ \left.\left(u + h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{3}$$

此问题的解也是存在唯一的，唯一性可用 Gauss 公式推出，且也是自共轭的边值问题. 若 $G(x, \xi)$ 满足：

$$\begin{cases} \Delta_3 G(x, \xi) = \delta(x - \xi),\ x, \xi \in \Omega \\ \left.\left(G + h\frac{\partial G}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

则称 $G(x, \xi)$ 为问题(3)的 Green 函数，或者(3)的 Green 函数可直接定义为

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} + g(x, \xi)$$

其中 $r=|x-\xi|=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}$.

$g(x,\xi)$ 满足：

$$\begin{cases} \Delta_3 g(x,\xi)=0 & x,\xi\in\Omega \\ \left(g+h\dfrac{\partial g}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r}+h\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r}\right)\Big|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

类似于第一边值问题(1)的情况，可证明

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

问题(3)的解也可通过其 Green 函数表示为

$$\begin{aligned} u(\xi)&=\iiint_\Omega G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x+\oiint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S \\ &=\iiint_\Omega G(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{h}\oiint_{\partial\Omega}\varphi G(x,\xi)\mathrm{d}S_x \end{aligned}$$

设 $G(x,\xi)$ 是问题(3)的 Green 函数，则固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 V+\lambda V=0,\ x\in\Omega \\ \left(V+h\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{4}$$

等价于积分方程的固有值问题

$$V(x)=-\lambda\iiint_\Omega G(x,\xi)V(\xi)\mathrm{d}\xi$$

设固有值问题(4)的固有值序列为 $\lambda_{n,m,k}$，对应的固有函数序列为 $V_{n,m,k}(x)$，它们构成区域 Ω 上完备的正交系，$G(x,\xi)$ 可按此固有函数系展开得

$$G(x,\xi)=-\sum_n\sum_m\sum_k\frac{1}{\lambda_{n,m,k}\|V_{n,m,k}(x)\|^2}V_{n,m,k}(\xi)V_{n,m,k}(x)$$

*5.2.3 三维调和方程第二边值问题的相容性条件及其广义的 Green 函数

设

$$\begin{cases} \Delta_3 u=f(x),\ x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=\varphi \end{cases} \tag{5}$$

这时齐次问题有非零解，即任意一个常数均为齐次问题的解，根据 Gauss 公式有

$$\iiint_{\Omega} \Delta_3 u \mathrm{d}x = \oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s$$

所以问题(5)有解的相容性条件为

$$\iiint_{\Omega} f(x) \mathrm{d}x = \oiint_{\partial\Omega} \varphi \mathrm{d}s$$

当此相容性条件成立时，问题(5)有解存在，在相差一个任意常数的意义下解是唯一的.

由于

$$\begin{cases} \Delta_3 G(x, \xi) = \delta(x - \xi), \ x, \xi \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

不满足相容性条件，即

$$\iiint_{\Omega} \delta(x - \xi) \mathrm{d}x = 1 \neq 0$$

所以问题(5)通常意义下的 Green 函数不存在，为此定义广义的 Green 函数 $E(x, \xi)$ ，它满足

$$\begin{cases} \Delta_3 E(x, \xi) = \delta(x - \delta) - \dfrac{1}{\Omega}, \ x, \xi \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial E}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

其中方程右端的 Ω 表示区域 Ω 的体积，此时相容性条件成立，即

$$\iiint_{\Omega} \left(\delta(x - \xi) - \frac{1}{\Omega}\right) \mathrm{d}x = 1 - 1 = 0$$

也可直接把问题(5)的广义 Green 函数 $E(x, \xi)$ 定义为

$$E(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi r} + g(x, \xi)$$

其中 $r = |x - \xi|$, $g(x, \xi)$ 满足

$$\Delta_3 g(x, \xi) = -\frac{1}{\Omega}$$

$$\frac{\partial g}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\partial\Omega}$$

对于 $g(x, \xi)$ 的上述第二边值问题，相容性条件成立，即

$$\oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s_x = -4\pi$$

上述等式几何上的意义表示从 Ω 内的一点 ξ 看 $\partial\Omega$ 的外侧的立体解为 -4π. $g(x, \xi)$ 除了相差一个常数外是唯一确定的.

当问题(5)相容性条件成立时，它的解也可通过广义 Green 函数 $E(x, \xi)$ 表为

$$u(\xi) = \iiint_{\Omega} E(x, \xi) f(x)\mathrm{d}x - \oiint_{\partial\Omega} E(x, \xi)\varphi \mathrm{d}s_x + c$$

5.2.4 二维调和方程边值问题及其 Green 函数

和三维调和方程的边值问题完全类似，可以引入二维调和方程边值问题的有关概念和理论.

设二维调和方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = f(x), \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{6}$$

其中 Ω 是 R^2 中某一光滑的平面区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，$f(x)$ 和 φ 是充分光滑的函数，此问题的解是存在唯一的，它也是一个自共轭的问题. 称

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g(x, \xi)$$

是(6)的 Green 函数，其中 $x, \xi \in \Omega$，

$$r = |x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$$

$g(x, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_2 g(x, \xi) = 0 \\ g|_{\partial\Omega} = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}\bigg|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

即 Green 函数 $G(x, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_2 G = \delta(x-\xi) & x, \xi \in \Omega \\ G|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

应用 Green 公式，可以证明

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

且可把问题(6)的解表为

$$u(\xi) = \iint_{\Omega} G(x, \xi) f(x) \mathrm{d}x + \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \mathrm{d}S_x$$

或

$$u(x) = \iint_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi + \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \mathrm{d}S_\xi$$

设固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 V + \lambda V = 0 & x \in \Omega \\ V|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

的固有值序列为 $\lambda_{n,m}$，对应的固有函数序列为 $V_{n,m}(x)$，则问题(6)的格林函数可表为

$$G(x, \xi) = -\sum_n \sum_m \frac{1}{\lambda_{nm} \|V_{nm}(x)\|^2} V_{nm}(\xi) V_{nm}(x)$$

固有值问题(7)等价于积分方程的固有值问题

$$V(x) = -\lambda \iint_{\Omega} G(x, \xi) V(\xi) \mathrm{d}\xi$$

对于某些特殊的区域，可类似的应用电像法求出(6)的 Green 函数．一般情况需求解一个特殊的关于 $g(x, \xi)$ 的边值问题．

对于二维调和方程的边值问题(6)及其 Green 函数的求解还可应用复变函数保角变换的理论和方法，这是一种很强有力的方法，有许多专门的著作讨论这方面的有关问题．下面仅介绍一个最基本的定理．

定理 设 $z = x_1 + ix_2$，$z_0 = \xi_1 + i\xi_2$ 为复平面区域 Ω 内的两

个点，若存在一个一对一的保角变换

$$w = w(z, z_0) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$$

把 z 平面的区域 Ω 变为 w 平面的单位圆的内部 $|w| < 1$，把 z_0 变到 w 平面的原点，则问题(6)的 Green 函数为

$$G(x, \xi) = G(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z, z_0)|}$$

证明 根据假设可知，$w = w(z, z_0)$ 一定把 $\partial\Omega$ 的点变到单位圆周 $|w| = 1$ 上，所以

$$G(z, z_0)|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z, z_0)|}\bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

又因

$$G(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z - z_0|} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z - z_0|}{|w(z, z_0)|}$$

令

$$g(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z - z_0|}{|w(z, z_0)|}$$

$$f(z, z_0) = \frac{z - z_0}{w(z, z_0)}$$

根据假设，$w(z, z_0)$ 是一对一的使 Ω 变为 $|w| < 1$ 的保角变换，所以当 $z \neq z_0$ 时 $f(z, z_0) \neq 0$，且解析，又因

$$\lim_{z\to z_0} f(z, z_0) = \frac{1}{w'(z_0, z_0)} \neq 0$$

故知 $f(z, z_0)$ 在 Ω 内解析，且不为零，所以 $g(z, z_0)$ 在 Ω 内调和，所以 $G(z, z_0)$ 为问题(6) 的 Green 函数 .

推论 若一对一的保角变换 $w = w(z)$ 使区域 Ω 变到上半平面 $Im\ w > 0$，则问题(6)的 Green 函数为

$$G(x, \xi) = G(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{w(z) - \overline{w(z_0)}}{w(z) - w(z_0)}\right|$$

例1 圆域第一边值问题及其 Green 函数和 Poisson 公式.

设

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \ r < R \\ u|_{r=R} = \varphi(x) \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

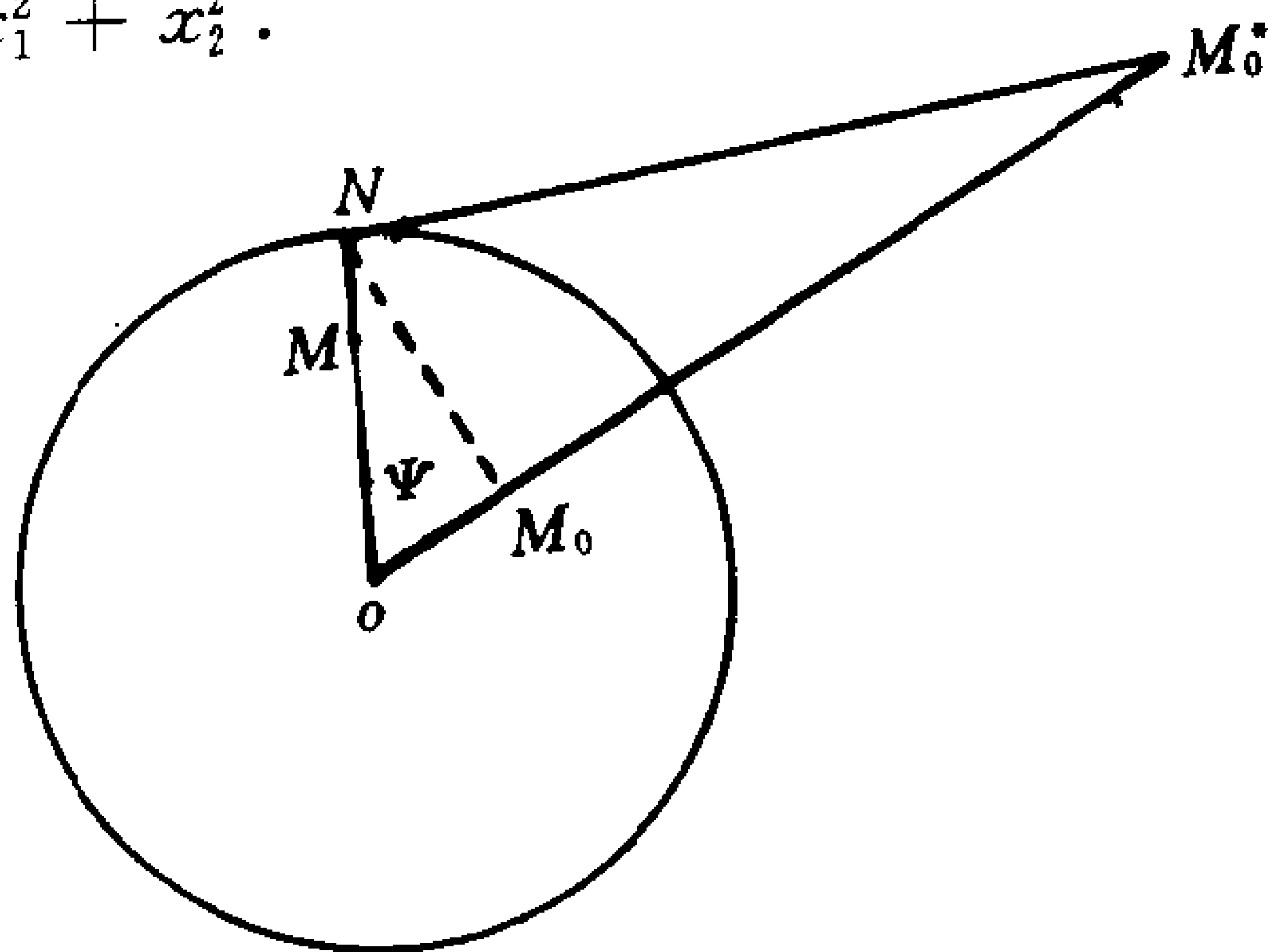


图 5.2

如图5.2，设 $M(x_1, x_2)$，$M_0^*(\xi_1, \xi_2)$ 是圆域 $B_R(0)$ 内的两个点，$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$，$\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$，$M_0^*$ 是 M_0 关于圆周 $\partial B_R(0)$ 的对称点，它的坐标为 $\dfrac{R^2}{\rho^2}(\xi_1, \xi_2)$，$\rho_1 = \overline{OM_0^*} = \dfrac{R^2}{\rho}$，完全类似于三维的情况，应用电像法可得此问题的格林函数为

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \ln\frac{\rho}{R \cdot r_{MM_0^*}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho}\frac{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r\cos\psi}}{\sqrt{r^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1 r\cos\psi}}$$

而在圆周上时，

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{1}{2\pi R}\frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi)}$$

所以得

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{r=R}\frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\psi)}\varphi \mathrm{d}S_x$$

或者

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R}\oint\limits_{\rho=R}\frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\psi)}\varphi \mathrm{d}S_\xi$$

如果应用极坐标 (r, θ)，设 M 点的极坐标为 (r, θ)，圆周上的点极坐标为 (R, θ_0)，u 的边界值为 $\varphi(\theta_0)$，则得

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\psi)}\varphi(\theta_0)\mathrm{d}\theta_0$$

其中

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0$$

如果应用保角变换来求 Green 函数，所得的结果完全相同，这时

$$w = w(z, z_v) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

把圆域 $B_R(0)$ 变为 w 平面的单位圆 $|w| < 1$，把 z_0 点变为原点，所以

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{R^2 - \bar{z}_0 z}{R(z - z_0)}\right| \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|z - z_0|} - \ln\frac{R}{|R^2 - \bar{z}_0 z(z - z_0)|}\right] \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \ln\frac{\rho}{R}\frac{1}{r_{MM_0^*}}\right] \end{aligned}$$

又因固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 V + \lambda V = 0, & r < R \\ V|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

的固有值数列是 $\lambda_{nk} = w_{nk}^2$，对应的固有函数系是

$$J_n(w_{nk}r)\cos n\theta, \ J_n(w_{nk}r)\sin n\theta$$

其中 (r, θ) 为极坐标，w_{nk} 是 $J_n(wR)$ 的第 k 个正根，$n = 0, 1, 2, \cdots$，$k = 1, 2, \cdots$. 所以 $G(x, \xi)$ 又可按上述固有函数系展开.

例2 半平面第一边值问题及其 Green 函数.

设

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0,\ x_2 > 0 \\ u\big|_{x_2=0} = \varphi(x_1) \end{cases}$$

设 $M(x_1, x_2)$，$M_0(\xi_1, \xi_2)$ 是上半平面的两点，$M_0^*(\xi_1, -\xi_2)$ 是 $M_0(\xi_1, \xi_2)$ 关于平面 $x_2 = 0$ 的对称点，根据电像法，问题的 Green 函数为

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{MM_0^*}}{r_{MM_0}} = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2+\xi_2)^2}{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}$$

在边界 $x_2 = 0$ 上，

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{x_2=0} = -\frac{\partial G}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = \frac{1}{\pi}\frac{\xi_2}{(x_1-\xi_1)^2+\xi_2^2}$$

所以

$$u(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_2}{(x_1-\xi_1)^2+\xi_2^2}\varphi(x_1)\mathrm{d}x_1$$

或

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2}{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}\varphi(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1$$

例3 条形域第一边值问题的 Green 函数.

设

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, x \in \Omega = \{-\infty < x_1 < +\infty, 0 < x_2 < \pi\} \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

由于 $w = \mathrm{e}^z$ 把条形域 Ω 一对一的保角地变到了上半平面，所以 Green 函数为

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^z - \overline{\mathrm{e}^{z_0}}}{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{z_0}}\right|$$

其中 $z = x_1 + ix_2$，$z_0 = \xi_1 + i\xi_2$，如果把上述对数号里函数的分子和分母进行因式分解写为连乘的形式就和电像法得的结果完全一致.

本例中也可以用积分变换法（实质上就是分离变量法）来求出 Green 函数，由

$$\begin{cases} \Delta_2 G(x, \xi) = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), x, \xi \in \Omega \\ G|_{x_2=0} = 0 \\ G|_{x_2=\pi} = 0 \end{cases}$$

相对于自变量 x_1 作 Foueier 变换得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{G}(\lambda_1, x_2, \xi)}{dx_2^2} - \lambda_1^2\overline{G}(\lambda_1, x_2, \xi) = e^{-i\lambda_1\xi_1}\delta(x_2 - \xi_2) \\ \overline{G}(\lambda_1, x_2, \xi)|_{x_2=0} = 0 \\ \overline{G}(\lambda_1, x_2, \xi)|_{x_2=\pi} = 0 \end{cases}$$

再相对于自变量 x_2 作有限的正弦变换(实质上就是把 $\overline{G}(\lambda_1, x_2, \xi)$ 按固有函数系 $\sin nx_2$ 展开)得

$$-(n^2 + \lambda_1^2)\overline{G}_n(\lambda_1, \xi) = e^{-i\lambda_1\xi_1}\sin n\xi_2$$

$$\overline{G}_n(\lambda_1, \xi) = -\frac{1}{n^2 + \lambda_1^2}e^{-i\lambda_1\xi_1}\sin n\xi_2$$

作反变换回到自变量 x_1, x_2 得

$$\overline{G}(\lambda_1, x_2, \xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda_1\xi_1}}{n^2 + \lambda_1^2}\sin n\xi_2\sin nx_2$$

$$G(x, \xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda_1(x_1-\xi_1)}}{n^2 + \lambda_1^2}d\lambda_1 \cdot \sin n\xi_2\sin nx_2$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-n|x_1-\xi_1|}\sin n\xi_2\sin nx_2$$

例4 矩形域第一边值问题的 Green 函数.

设

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, x \in \Omega = \{0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

由于固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0 \quad x \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的固有值序列为 $\lambda_{n,m}=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$，对应的固有函数系为 $\sin\frac{n\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{b}$，$n=1,2,\cdots$，$m=1,2,\cdots$. 所以问题的 Green 函数为

$$G(x,\xi)=-\sum_n\sum_m\frac{4ab}{(bn\pi)^2+(am\pi)^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{a}x_1\sin\frac{m\pi}{b}x_2\sin\frac{n\pi}{a}\xi_1\sin\frac{m\pi}{b}\xi_2$$

如果直接应用复变函数论中把上述矩形域一对一的变到上半平面的 Jacobi 保角变换 $w=s(z)$，则可得出 Green 函数的另一种表达式

$$G(x,\xi)=-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{s(z)-\overline{s(z_0)}}{s(z)-s(z_0)}\right|$$

完全类似于三维调和方程的情况，可以定义二维调和方程第三边值的 Green 函数，讨论二维调和方程第二边值问题有解的相容性条件和广义的 Green 函数.

5.2.5 Helmholtz 方程边值问题及其 Green 函数

设

$$\begin{cases}\Delta_3 u-k^2u=f(x), & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}\tag{8}$$

其中 Ω 为 R^3 中某一光滑区域，$f(x)$，φ是充分光滑的函数，$k>0$ 为一常数，问题(8)也是自共轭的边值问题，且解存在唯一. 唯一性的证明较简单，因为齐次问题

$$\begin{cases}\Delta_3 V-k^2V=0, & x\in\Omega\\ V|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

只能有零解，否则 V 必然在 Ω 内的某一点 x_0 达到 $\bar{\Omega}$ 上正的最大值或负的最小值，设 $V(x_0)$ 达到正的最大值，则 $\Delta_3V(x_0)\leqslant 0$，$\Delta_3V(x_0)-k^2V(x_0)<0$，这就是矛盾，类似的 $V(x)$ 不能在 Ω 内

达到负的最小值.

若 $G(x, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_3 G(x, \xi) - k^2 G(x, \xi) = \delta(x-\xi), & x, \xi \in \Omega \\ G|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

则称 $G(x, \xi)$ 为问题(8)的 Green 函数. 或者根据 Helmholtz 方程的基本解, 可直接定义 Green 函数为

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi r}e^{-kr} + g(x, \xi)$$

其中 $r = |x-\xi|$, $g(x, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_3 g - k^2 g = 0, & x, \xi \in \Omega \\ g|_{\partial\Omega} = \left.\frac{1}{4\pi r}e^{-kr}\right|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

即 $G(x, \xi)$ 除在点 ξ 有较低的奇性外, 在其它的点均满足齐次方程.

根据 $G(x, \xi)$ 的奇性和 Gauss 公式可证明

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

且问题(8)的解可表为

$$u(\xi) = \iiint_\Omega f(x)G(x, \xi)\mathrm{d}x + \oiint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s_x$$

或

$$u(x) = \iiint_\Omega f(\xi)G(x, \xi)\mathrm{d}\xi + \oiint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s_\xi$$

若采用较为形式的演算, 这些公式是容易导出的. 例如, 若 $u(x)$ 是(8)的解, 则一方面由

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega \{G(x, \xi)(\Delta_3 u - k^2 u) - u(\Delta_3 G - k^2 G)\}\mathrm{d}x \\ &= \iiint_\Omega G(x, \xi)f(x)\mathrm{d}x - \iiint_\Omega u(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x \\ &= \iiint_\Omega G(x, \xi)f(x)\mathrm{d}x - u(\xi) \end{aligned}$$

另一方面也直接应用 Gauss 公式得

$$I = \oiint_{\partial\Omega}\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s = -\oiint u\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s$$

所以

$$u(\xi) = \iiint_{\Omega} G(x, \xi)f(x)\mathrm{d}x + \oiint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s$$

若设固有值问题

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda V = 0, & x \in \Omega \\ V|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

的固有值序列为 $\lambda_{n,m,l}$，对应的固有函数系为 $V_{nml}(x)$，它们构成 Ω 区域上完备的正交系，若把 Green 函数按此固有函数系展开，则得

$$G(x, \xi) = -\sum_n\sum_m\sum_l \frac{1}{(\lambda_{n,m,l} + k^2)\|V_{nml}(x)\|^2}V_{nml}(\xi)V_{nml}(x)$$

设

$$\begin{cases} \Delta_3 u - k^2 u = f(x), & x \in \Omega \\ \left(u + h\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{10}$$

和

$$\begin{cases} \Delta_3 u - k^2 u = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{11}$$

其中 $h > 0$，$k > 0$．问题(10)和(11)也是自共轭的问题，且解均是存在唯一的，其唯一性可应用 Gauss 公式来证明．例如若 $V(x)$ 是(10)的齐次问题的解，即

$$\begin{cases} \Delta_3 V - k^2 V = 0, & x \in \Omega \\ \left(V + h\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

则根据 Gauss

$$\iiint_{\Omega} V\Delta_3 V \mathrm{d}x + \iiint_{\Omega} \|\mathrm{grad}V\|^2 \mathrm{d}x = \oiint_{\partial\Omega} V \frac{\partial V}{\partial n} \mathrm{d}s$$

$$k^2 \iiint_{\Omega} V^2(x) \mathrm{d}x + \iiint_{\Omega} \|\mathrm{grad}V\|^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{h} \oiint_{\partial\Omega} V^2 \mathrm{d}s$$

所以只有

$$V(x) \equiv 0$$

这就证明了问题(10)解的唯一性.

类似的可分别定义问题(10)和问题(11)的 Green 函数，并由 Green 函数来表示它们的解.

设

$$\begin{cases} \Delta_3 u + k^2 u = f(x), & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{12}$$

如果 k^2 不是固有值(9)的固有值，则对应的齐次问题只有零解，所以问题(12)的解唯一，这时解也是存在的，类似的可定义问题(12)的 Green 函数

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi r}\cos kr + g(x, \xi)$$

其中 $r = |x - \xi|$，$g(x, \xi)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_3 g + k^2 g = 0 \\ g|_{\partial\Omega} = \dfrac{1}{4\pi r}\cos kr|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

这时问题(12)的 Green 函数是存在唯一的，且也具有对称的性质 $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. 且也可用固有值问题(9)的固有函数系 $V_{n,m,l}(x)$ 来展开得

$$G(x, \xi) = -\sum_{n}\sum_{m}\sum_{l} \frac{1}{(\lambda_{n,m,l} - k^2)\|V_{nml}(x)\|^2} V_{nml}(\xi) V_{nml}(x)$$

这时问题(12)的解可用 Green 函数表示为

$$u(\xi) = \iiint_{\Omega} f(x) G(x, \xi) \mathrm{d}x + \oiint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \mathrm{d}s$$

如果 k^2 是固有值问题(9)的一个固有值，即问题(12)的齐次

问题有非零解，则问题有重大差别，需 $f(x)$ 和 φ满足相容性条件时问题(12)才有解. 设 $V(x)$ 是齐次问题的非零解，$u(x)$ 是(12)的解，则由

$$I=\iiint_{\Omega}\{V(x)\left[\Delta_3 u+k^2 u\right]-u\left[\Delta_3 V+k^2 V\right]\}\mathrm{d}x$$

$$=\iiint_{\Omega}V(x)f(x)\mathrm{d}x$$

另一方面根据 Gauss 公式有

$$I=\oiint_{\partial\Omega}\left\{V(x)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial V}{\partial n}\right\}\mathrm{d}s$$

$$=-\oiint_{\partial\Omega}u\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s=-\oiint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s$$

所以

$$\iiint_{\Omega}V(x)f(x)\mathrm{d}x=-\oiint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}s$$

这就是问题(12)有解的相容性条件，而当此相容性条件成立时，问题(12)有解，但解一定不唯一，而可以相差齐次问题的任意一个非零解. 在这种情况下通常的 Green 函数不存在，而需采用广义的 Green 函数 $E(x,\xi)$，设固有值问题(9)对应于固有值 k^2 的固有函数组成的线性空间的一组基为 $V_1(x)$，$V_2(x)$，…，$V_s(x)$，不妨设它们在 Ω 上正交，则(12)的广义 Green 函数 $E(x,\xi)$ 为问题

$$\Delta_3 E(x,\xi)+k^2 E(x,\xi)=\delta(x-\xi)-\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\|V_i(x)\|^2}V_i(\xi)V_i(x)$$

$$E|_{\partial\Omega}=0$$

的解，此问题满足相容性条件，设固有值问题(9)除了固有值 k^2 外其它的固有值序列为 $\lambda_{n,m,l}$，对应的其它的固有函数系为 $V_{n,m,l}(x)$，这时 $V_1(x)$，…，$V_s(x)$ 和固有函数系 $V_{n,m,l}(x)$ 一起构成 Ω 上完备的正交系，把 $E(x,\xi)$ 按此函数系展开则可得

$$E(x, \xi) = -\sum_n \sum_m \sum_l \frac{1}{(\lambda_{n,m,l} - k^2)\|V_{nml}(x)\|^2} V_{nml}(\xi) V_{nml}(x) + \sum_{i=1}^{s} C_i V_i(x)$$

其中 $(C_1, C_2, \cdots, C_s)$ 可以取任意的常数组，此时当问题(12)的相容性条件满足时，它的解可表为

$$u(\xi) = \iiint_\Omega E(x, \xi) f(x) \mathrm{d}x + \oiint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial E}{\partial n} \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{s} C_i V_i(\xi)$$

对于方程 $\Delta_3 u + k^2 u = f(x)$ 可以类似的对第二和第三边值问题进行相同的讨论.

对于二维 Helmholtz 方程 $(\Delta_2 \pm k^2)u = f(x)$ 的三种边值问题也可进行相同的讨论.

* 5.3 偏微分方程初值问题和混合问题的 Green 函数

对于线性二阶双曲型方程和抛物型方程的初值问题也可引入 Green 函数的概念，且也可用 Green 函数表示问题的解，这和椭圆型方程边值问题的情况有相似之处，但又有一定的不同，本节用几个最简单的问题来进行讨论.

5.3.1 一维波动方程初值问题的 Green 函数

设

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad t > 0, x \in R^1 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{1}$$

若 $G(x, t; \xi, \tau)$ 满足

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - \xi, t - \tau), t, \tau > 0, x, \xi \in R^1$$

$$G|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

则称 $G(x,t;\xi,\tau)$ 为问题(1)的 Green 函数.

若 $U(x,t;\xi,\tau)$ 满足初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0, & t>\tau,\tau>0\\ U|_{t=\tau}=0,\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\delta(x-\xi)\end{cases}$$

其中 $x,\xi\in R^1$, $t\geqslant\tau$, $\tau\geqslant 0$，则

$$U(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a}H(a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2),\ t\geqslant\tau$$

不难验证

$$G(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}U(x,t;\xi,\tau), & t\geqslant\tau,\ x,\xi\in R^1\\ 0, & 0\leqslant t<\tau,\ x,\xi\in R^1\end{cases}$$

即如图5.3所示，在过点 (ξ,τ) 的两特征线所夹的解域内 $G=\dfrac{1}{2a}$，而在余下的 $t>0$ 区域内 $G=0$.

根据上述分析，由叠加原理和齐次化原理可知问题(1)的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\int_0^\infty d\tau\int_{-\infty}^\infty G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi\\&+\int_{-\infty}^\infty G(x,t;\xi,0)\psi(\xi)d\xi\\&+\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^\infty G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi\end{aligned}$$

即

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$$

下面用另一种方法来推出上述问题(1)的解的积分表达式，使得更能体现出共轭算子法的意义，更好的把此时的 Green 函数和椭圆型方程边值问题的 Green 函数加以比较. 设在 $G(x,t;\xi,\tau)$ 中把 (ξ,τ) 视作自变量，(x,t) 视作参变量，则如图(5.4)所示，在 (ξ,τ) 的上半平面 $\tau>0$ 中，在过点 (x,t) 的两特征线和 $\tau=0$ 所围成的特征三角形内 $G=\frac{1}{2a}$，在其余的区域内 $G=0$，这时 $G(x,t;\xi,\tau)$ 满足

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}=\delta(\xi-x,\tau-t),\ \tau>0,\ t>0$$

$$G|_{\tau=0}=\frac{1}{2a}H(a^2t^2-(\xi-x)^2)$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=-\frac{1}{2}[\delta(\xi-(x-at))+\delta(\xi-(x+at))]$$

若设 $u(\xi,\tau)$ 是问题(1)的解，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=f(\xi,\tau), & \tau>0,\ \xi\in R^1\\[2mm] u|_{\tau=0}=\varphi(\xi),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\psi(\xi)\end{cases}$$

在上半平面区域 $\tau>0$ 上形式地应用 Green 公式，则一方面

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\tau>0}\left\{G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)-u(\xi,\tau)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}\right)\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\ &=\iint\limits_{\tau>0}\{G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\\ &\quad-u(\xi,\tau)(\delta(\xi-x,\tau-t))\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau-u(x,t)\end{aligned}$$

另一方面

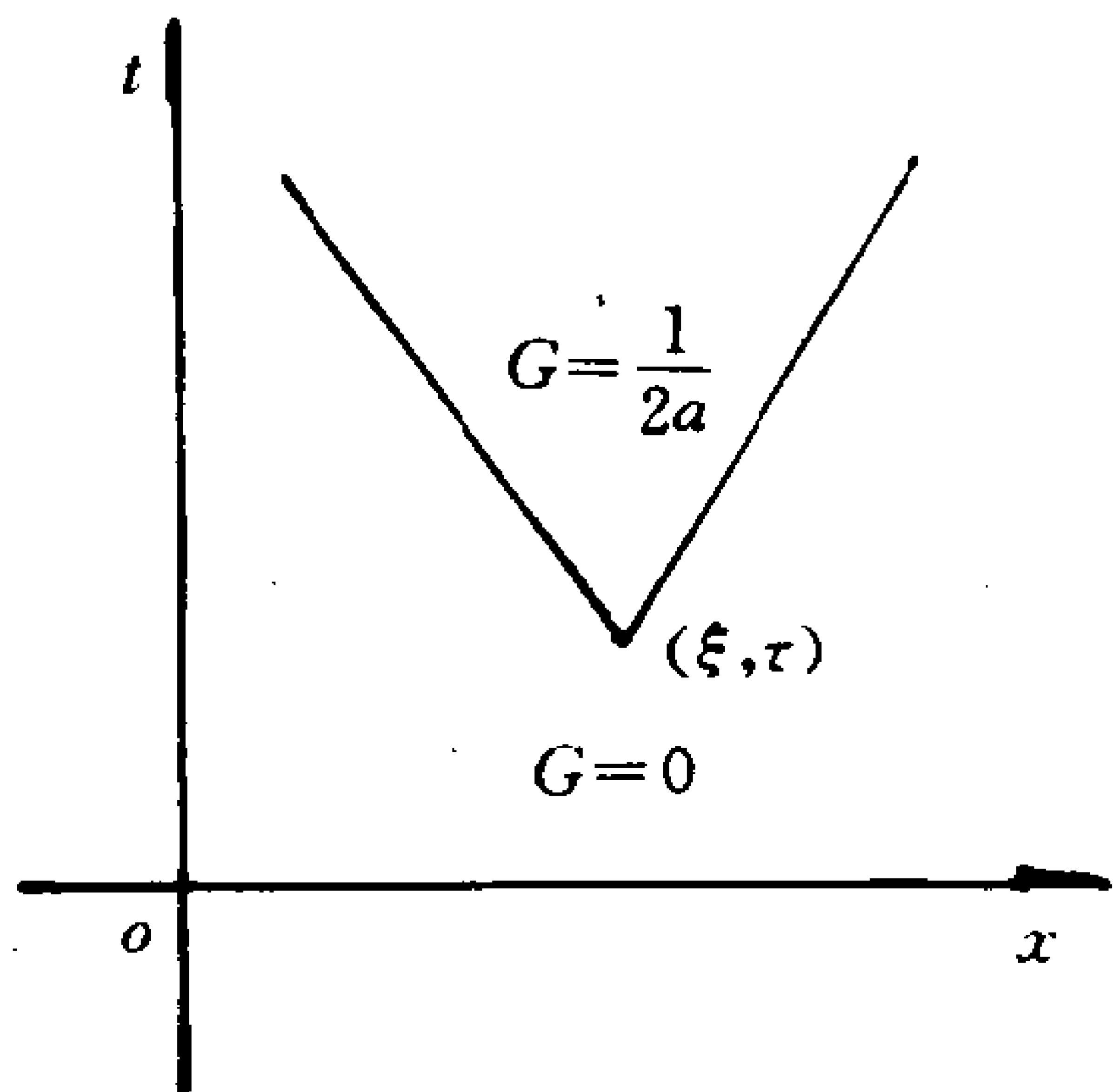


图 5.3

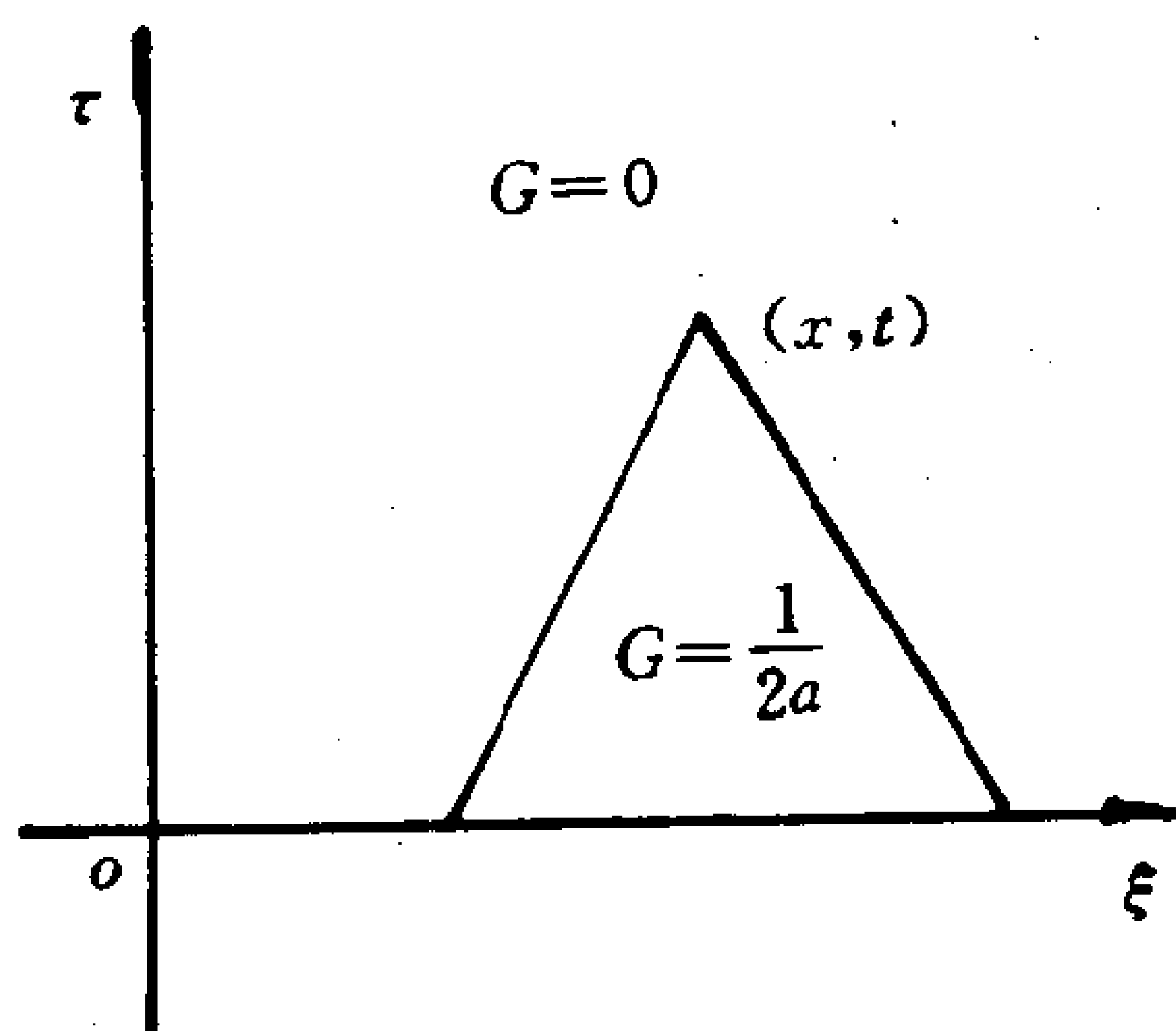


图 5.4

$$I=\iint\limits_{\tau>0}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left(G\frac{\partial u}{\partial\tau}-u\frac{\partial G}{\partial\tau}\right)+a^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u\frac{\partial G}{\partial\xi}-G\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(u\frac{\partial G}{\partial\xi}-G\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\bigg|_{\tau=0}\mathrm{d}\xi$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)[\delta(\xi-(x-at))+\delta(\xi-(x+at))]\mathrm{d}\xi$$

$$-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=-\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

所以得

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$$

5.3.2 一维热传导方程初值问题的 Green 函数

设

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad t > 0, x \in R^1 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{2}$$

若 $G(x, t; \xi, \tau)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-\xi, t-\tau) \\ G|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

则称 $G(x, t; \xi, \tau)$ 为问题(2)的 Green 函数.

若 $U(x, t; \xi, \tau)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad t > \tau, \tau > 0 \\ U|_{t=\tau} = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

即

$$U(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$t \geqslant \tau, \ x, \xi \in R^1, \ \tau \geqslant 0$$

则不难验证

$$G(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} U(x, t; \xi, \tau), & t \geqslant \tau \\ 0, \ 0 \leqslant t < \tau \end{cases}$$

根据叠加原理和齐次化原理问题(2)的解可表为

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi$$

即

$$u(x, t)=\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

也可用另一种基于共轭算子的方法推出上述解的积分表达式，设在 $G(x, t; \xi, \tau)$ 中视 (ξ, τ) 为自变量，(x, t) 为参数，则 G 满足

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial G}{\partial \tau}-a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}=\delta(\xi-x, \tau-t), \quad \tau>0, t>0 \\ G|_{\tau=0}=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \end{cases}$$

设 $u(\xi, \tau)$ 是问题(2)的解，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau}-a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=f(\xi, \tau), \quad \tau>0 \\ u|_{\tau=0}=\varphi(\xi) \end{cases}$$

在上半平面 $\tau>0$ 上形式地应用 Green 公式，则一方面

$$I=\iint_{\tau>0}\left\{G\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}-a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)-u\left(-\frac{\partial G}{\partial \tau}-a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}\right)\right\} d\xi d\tau$$

$$=\iint_{\tau>0} G f(\xi, \tau) s\xi d\tau-\iint_{\tau>0} u\,[\delta(\xi-x, \tau-t)] d\xi d\tau$$

$$=\iint_{\tau>0} G f(\xi, \tau) s\xi d\tau-u(x, t)$$

另一方面

$$I=\iint_{\tau>0}\left\{\frac{\partial}{\partial \tau}(Gu)+a^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(u \frac{\partial G}{\partial \xi}-G \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\right\} d\xi d\tau$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}(Gu)|_{\tau=0} d\xi$$

所以得

$$u(x,t)=\iint_{\tau>0} Gf(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)\mathrm{d}\xi$$

即

$$u(x,t)=\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

5.3.3 一维热传导方程混合问题的 Green 函数

设

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \\ u|_{x=x_1(t)}=\mu_1(t),\ u|_{x=x_2(t)}=\mu_2(t)\end{cases}\tag{3}$$

其中 Ω 为 (x,t) 平面中如图5.5所示的一个曲边的半条形区域，一般称之为活动边界的混合问题. 而当 $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv l$ 时则为非活动边界的混合问题，这时 Ω 的两例边为直线.

若 $G(x,t;\xi,\tau)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-\xi,t-\tau) \\ G|_{t=0}=0 \\ G|_{x=x_1(t)}=0,\ G|_{x=x_2(t)}=0\end{cases}$$

其中 (x,t), $(\xi,\tau)\in\Omega$，则称 $G(x,t;\xi,\tau)$ 为问题(3)的 Green 函数，过 (ξ,τ) 点作方程的特征线为 $t=\tau$，在此特征线下的区域 $0\leqslant t<\tau$ 内 $G=0$.

如果在 $G(x,t;\xi,\tau)$ 中视 (x,t) 为参变量，(ξ,τ) 为自变量，则 G 满足

$$-\frac{\partial G}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}=\delta(x-\xi,t-\tau)$$

$$G|_{\xi=x_1(\tau)} = 0, \; G|_{\xi=x_2(\tau)} = 0$$

这时在过点 (x, t) 的特征线 $\tau = t$ 的上方 $\tau > t$ 时，$G = 0$（图5.6）.

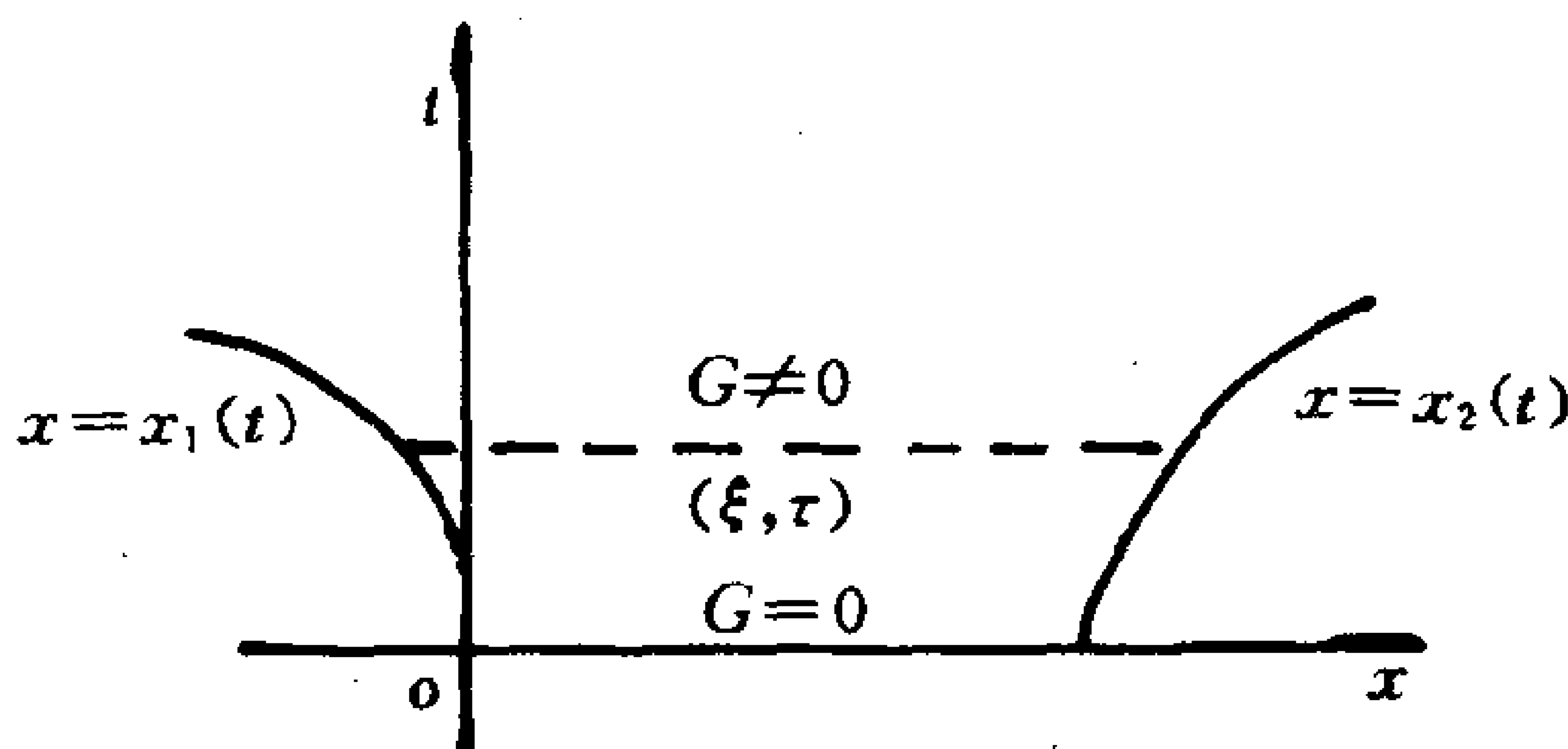


图 5.5

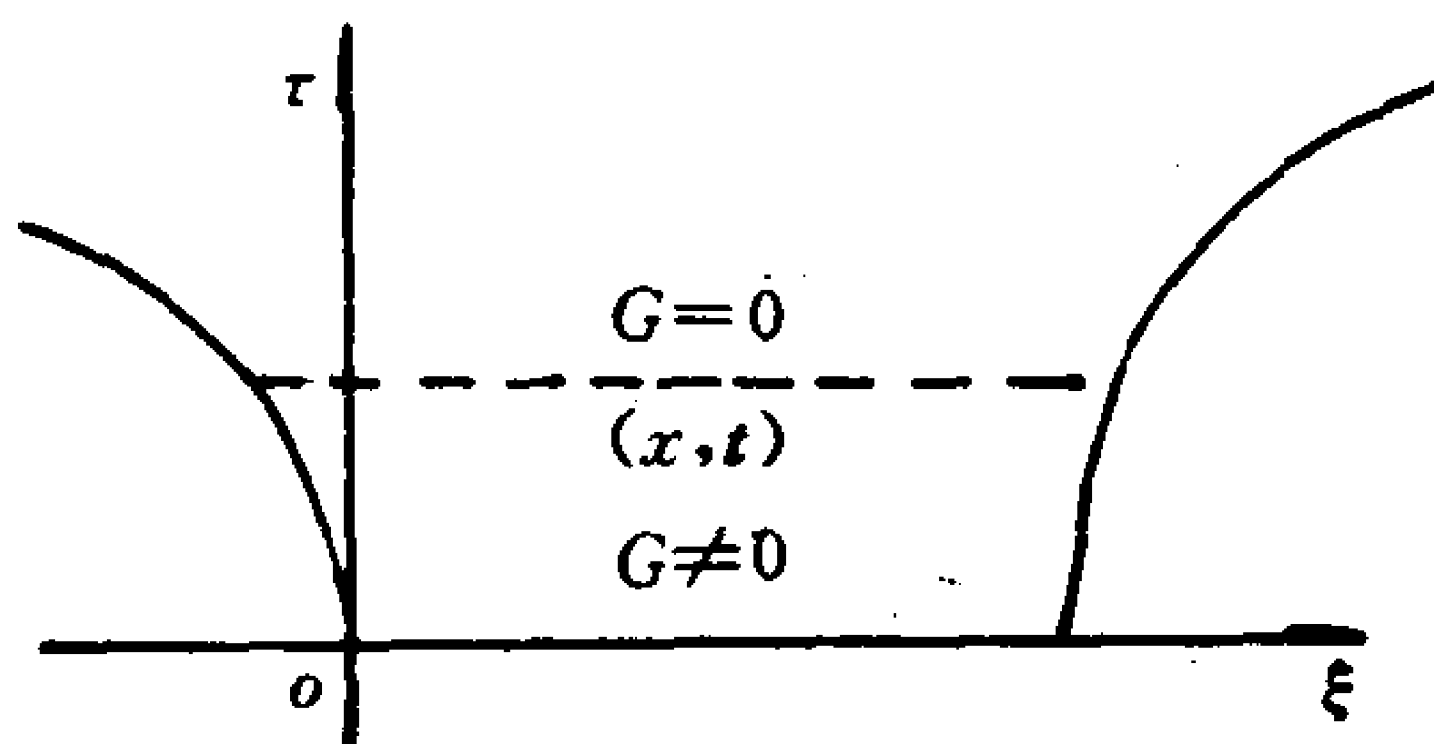


图 5.6

设 $u(\xi, \tau)$ 是问题(3)的解，在区域 Ω 中应用 Green 公式，则一方面

$$I = \iint_{\Omega} \left\{ G(x, t; \xi, \tau)\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) - u(\xi, \tau)\left(-\frac{\partial G}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}\right)\right\} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau$$

$$= \iint_{\Omega} G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) \mathrm{s}\xi \mathrm{d}\tau - u(x, t)$$

另一方面也形式地应用 Green 公式，则

$$I = -\int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) \mathrm{d}\xi + a^2 \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} - G \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \mathrm{d}\tau$$

其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，方向如图5.6所示的逆时针方向. 所以得

$$u(x, t)=\int_{\partial\Omega} G(x, t; \xi, \tau)u(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi - a^2\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G}{\partial \xi} - G\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\tau$$

$$+\iint_{\Omega} G(x, t; \xi, \tau)f(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

即通过 Green 函数和定解问题(3)的定解条件来表示问题(3)的解. 特别对于非活动的边界，则

$$u(x,t)=\iint_{\Omega} G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + \int_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\tau$$

$$+ a^2\int_0^t \mu_1\frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}\mathrm{d}\tau - a^2\int_0^t \mu_2(\tau)\frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=l}\mathrm{d}\tau$$

因为一维热传导方程的基本解为

$$E(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}H(t-\tau)$$

所以又可令

$$G(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} E(x, t; \xi, \tau) + g(x, t; \xi, \tau), & t \geqslant \tau \\ 0, \ 0 \leqslant t < \tau \end{cases}$$

而 $g(x, t; \xi, \tau)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \quad (x, t) \in \Omega, t > \tau \\ g|_{t=\tau} = 0 \\ g|_{x=x_1(t)} = -E(x, t; \xi, \tau)|_{x=x_1(t)} \\ g|_{x=x_2(t)} = -E(x, t; \xi, \tau)|_{x=x_2(t)} \end{cases}$$

或者作为 (ξ, τ) 的函数，(x, t) 作为参变量，则

$$-\frac{\partial g}{\partial \tau} - a^2\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi, \tau) \in \Omega, \tau < t$$

$$g|_{t=\tau} = 0$$

$$g|_{\xi=x_1(\tau)} = -E(x, t; \xi, \tau)|_{\xi=x_1(t)}$$

$$g|_{\xi=x_2(\tau)} = E(x, t; \xi, \tau)|_{\xi=x_2(\tau)}$$

这样，类似于电像法，对于非活动边界的情况可以用一般的反射法求得 Green 函数得

$$G(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (E(x, t; 2nl + \xi, \tau) \\ \qquad - E(x, t; 2nl - \xi, \tau))H(t - \tau), \ t \geqslant \tau \\ 0, \ 0 \leqslant t < \tau \end{cases}$$

对于非活动边界的情况也可用分离变量法求出 Green 函数得

$$G(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{n\pi}{l}a)^2(t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi, t \geqslant \tau \\ 0, \ 0 \leqslant t < \tau \end{cases}$$

相仿地可以定义一维热传导方程其它边界条件下混合问题的 Green 函数及通过 Green 函数表示混合问题的解. 类似地可以定义一维波动方程混合问题的 Green 函数及通过 Green 函数表示混合问题的解. 本节中的一切讨论均可推广到高维热传导方程和高维波动方程的初值问题或混合问题.

在本节定义的 Green 函数 $G(x, t; \xi, \tau)$ 中更为确切的应该是当把 (ξ, τ) 作为自变量，(x, t) 作为参变量时才是原问题的 Green 函数. 如果要 (x, t) 作为自变量，(ξ, τ) 作为参变量，则原问题的 Green 函数应该是 $G(\xi, \tau; x, t)$. 这和非自共轭边值问题的 Green 函数相似.

*5.4 Riemann 函数和 Riemann 方法

5.4.1 **Riemann 函数**

设

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)$$

$$= f(x, y) \tag{1}$$

称之为 Laplace 双曲型方程，应用 Riemann 函数讨论此方程的各种定解问题的方法称之为 Riemann 方法.

方程(1)的共轭方程为

$$L^*[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + c(x, y)v$$
$$= g(x, y) \tag{2}$$

它也是 Laplace 双曲型方程. 有微分恒等式

$$v(x,y)L[u] - uL^*[v] = \frac{\partial}{\partial x}(P_1(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(P_2(x,y)) \tag{3}$$

其中

$$P_1(x, y) = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv$$

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv$$

对于任意有界的区域 Ω，在 Ω 上积分微分恒等式(3)并应用 Green 公式得

$$I = \iint_{\Omega} \{vL[u] - uL^*[v]\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \oint_{\partial\Omega} \left\{ \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv \right] \mathrm{d}y \right.$$
$$\left. - \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv \right] \mathrm{d}x \right\}$$
$$= \oint_{\partial\Omega} \left\{ \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv \right] \cos(n, x) \right.$$
$$\left. - \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv \right] \cos(n, y) \right\} \mathrm{d}s \tag{4}$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的外法向.

如果取 Ω 为一个矩形域 M_0QM_1P，如图5.7得

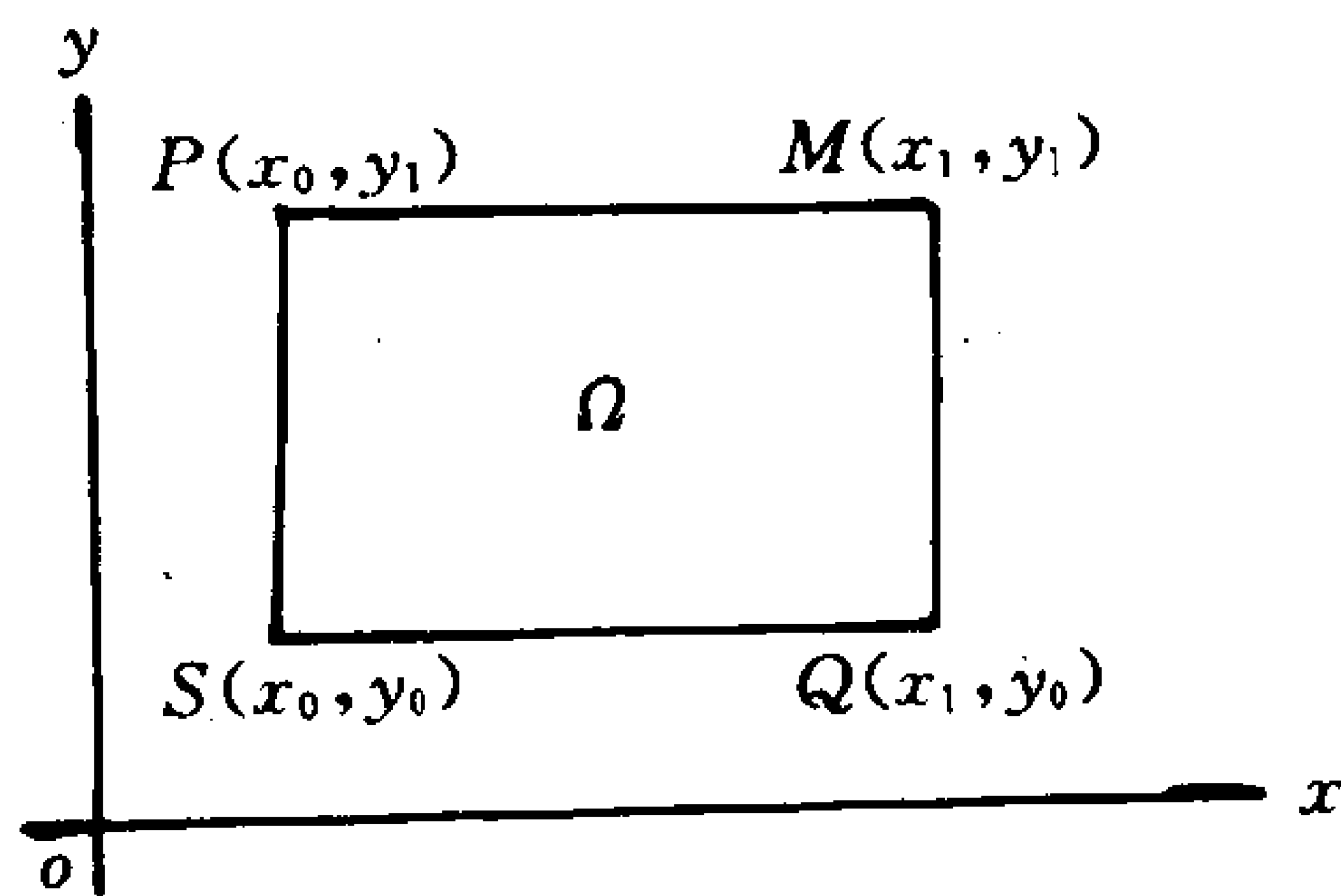


图 5.7

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\{vL[u]-uL^*[v]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(uv)|_{M_1}-(uv)|_{M_0}-\int_{Q}^{M_1}u\left(\frac{\partial v}{\partial y}-av\right)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{M_1}^{P}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-bv\right)\mathrm{d}x+\int_{P}^{M_0}v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+au\right)\mathrm{d}y$$

$$-\int_{M_0}^{Q}v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)\mathrm{d}x \tag{5}$$

据此而引入 Riemann 函数的概念.

如果 $R(x, y; x_1, y_1)$ 满足

$$\begin{cases} L^*[R]=0 \\ R(x, y_1; x_1, y_1)=\mathrm{e}^{\int_{x_1}^{x}b(x, y_1)\mathrm{d}x} \\ R(x_1, y; x_1, y_1)=\mathrm{e}^{\int_{y_1}^{y}a(x_1, y)\mathrm{d}y} \end{cases} \tag{6}$$

则称 $R(x, y; x_1, y_1)$ 为方程(1)的 Riemann 函数，其中 (x, y) 为自变量，(x_1, y_1) 为参变量，它们均可任意的取值，且显然具有性质

$$R(x_1, y_1; x_1, y_1)=1$$

如果在(5)式中取 $v(x, y)=R(x, y; x_1, y_1)$，得

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R(x, y; x_1, y_1)L[u]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= u(x_1, y_1) - (uR)|_{M_0}$$

$$+\int_{P}^{M_0} R\left(\frac{\partial u}{\partial y}+au\right)\mathrm{d}y-\int_{M_0}^{Q} R\left(\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)\mathrm{d}x \qquad (7)$$

如果 $R^*(x, y; x_0, y_0)$ 满足

$$\begin{cases} L[R^*]=0 \\ R^*(x, y_0; x_0, y_0)=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} b(x, y_0)\mathrm{d}x} \\ R^*(x_0, y; x_0, y_0)=\mathrm{e}^{-\int_{y_0}^{y} a(x_0, y)\mathrm{d}y} \end{cases} \qquad (8)$$

则称 $R^*(x, y; x_0, y_0)$ 是方程(2)的 Riemann 函数，其中 (x, y) 为自变量，(x_0, y_0) 为参变量，它们也均可任意取值，显然也有性质

$$R^*(x_0, y_0; x_0, y_0)=1$$

如果在(5)式中取 $u(x, y)=R^*(x, y; x_0, y_0)$，$v(x, y)=R(x, y; x_1, y_1)$，则得

$$R^*(x_1, y_1; x_0, y_0)=R(x_0, y_0; x_1, y_1)$$

称此性质为 Riemann 函数的对称性. 即若在方程(1)的 Riemann 函数 $R(x, y; x_1, y_1)$ 中，视 (x, y) 为参变量，(x_1, y_1) 为自变量时，则它就是共轭方程(2)的 Riemann 函数. 即有

$$R^*(x, y; x_0, y_0)=R(x_0, y_0; x, y)$$

$$R(x, y; x_1, y_1)=R^*(x_1, y_1; x, y)$$

特别，对于自共轭的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x, y)u=f(x, y)$$

其 Riemann 函数必具有对称的性质

$$R(x, y; x_1, y_1)=R(x_1, y_1; x, y)$$

例1 $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f(x, y)$

Riemann 函数 $R(x, y; x_1, y_1)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = 0 \\ R|_{y=y_1} = 1 \\ R|_{x=x_1} = 1 \end{cases}$$

所以

$$R(x, y; x_1, y_1) = 1$$

例2 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cu = f(x, y)$，其中 c 为常数.

Riemann 函数 $R(x, y; x_1, y_1)$ 为

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + cR = 0$$

$$R|_{y=y_1} = 1$$

$$R|_{x=x_1} = 1$$

由对称性，可令 $R = R(\sigma)$，$\sigma = (x - x_1)(y - y_1)$，则得

$$\begin{cases} \sigma R''(\sigma) + R'(\sigma) + cR(\sigma) = 0 \\ R(0) = 1 \end{cases}$$

若令 $\sqrt{\sigma} = s$，则

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 R}{ds^2} + \dfrac{1}{s}\dfrac{dR}{ds} + 4cR(s) = 0 \\ R(0) = 0 \end{cases}$$

所以

$$R(x, y; x_1, y_1) = J_0(2\sqrt{c(x - x_1)(y - y_1)})$$

例3 Euler-Poisson 方程

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)$$

$$L^*[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\beta' + \beta}{(x-y)^2}v$$

$$= g(x, y)$$

在方程 $L[u]=f(x,y)$ 中有奇线 $x-y=0$，所以要分别在区域 $x-y>0$ 和 $x-y<0$ 中来求方程 $L[u]=f(x,y)$ 的 Riemann 函数. 例如在区域 $x-y>0$ 内求 Riemann 函数，且不失一般可设 $y_1\leqslant y<x\leqslant x_1$，Riemann 函数 $R(x,y;x_1,y_1)$ 满足

$$\begin{cases} L^*[R]=0 \\ R|_{x=x_1}=\mathrm{e}^{-\beta'\int_{y_1}^{y}\frac{1}{x_1-y}\mathrm{d}y}=\left(\dfrac{x_1-y}{x_1-y_1}\right)^{\beta'} \\ R|_{y=y_1}=\mathrm{e}^{\beta\int_{x_1}^{x}\frac{1}{x-y_1}\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{x-y_1}{x_1-y_1}\right)^{\beta} \end{cases}$$

若令

$$R=\frac{(x-y)^{\beta+\beta'}}{(x-y_1)^{\beta'}(x_1-y)^{\beta}}F(\sigma)$$

其中

$$\sigma=\frac{(x_1-x)(y-y_1)}{(x-y_1)(x_1-y)}$$

则得

$$\begin{cases} \sigma(1-\sigma)F''(\sigma)+(1-(\beta+\beta'+1)\sigma)F'(\sigma)-\beta\beta' F(\sigma)=0 \\ F(0)=1 \end{cases}$$

这是超几何微分方程的定解问题，其解为

$$F(\sigma)=F(\beta,\beta';1,\sigma)$$

另外，根据一般的积分关系式(5)或(7)可以由 Riemann 函数来构成共轭方程的一个基本解，即若令

$$E_1(x,y;x_1,y_1)=R(x,y;x_1,y_1)H(x-x_1,y-y_1)$$

$$E_2(x,y;x_1,y_1)=R(x,y;x_1,y_1)H(x_1-x,y_1-x)$$

$$E_3(x,y;x_1,y_1)=R(x,y;x_1,y_1)H(x_1-x,y-y_1)$$

$$E_4(x,y;x_1,y_1)=R(x,y;x_1,y_1)H(x-x_1,y_1-y)$$

则

$$L^*(E_1)=\delta(x-x_1,y-y_1)$$

$$L^*(E_2)=\delta(x-x_1,y-y_1)$$

$$L^*(E_3) = -\delta(x - x_1, y - y_1)$$
$$L^*(E_4) = -\delta(x - x_1, y - y_1)$$

这些基本解的支集分别在四分之一平面上. 最简单的例子是对于方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

则

$$R(x, y; x_1, y_1) = 1$$

所以

$$E_1(x, y; x_1, y_1) = H(x - x_1, y - y_1)$$
$$E_2(x, y; x_1, y_1) = H(x_1 - x, y_1 - y)$$
$$E_3(x, y; x_1, y_1) = H(x_1 - x, y - y_1)$$
$$E_4(x, y; x_1, y_1) = H(x - x_1, y_1 - y)$$

这种由 Riemann 函数可以构成共轭方程的一个基本解的性质给某些形式演算带来方便. 它的物理意义表示 Riemann 函数也是一种影响函数，将在以后定解问题的讨论中表现出来.

对于一般情况，要讨论方程(1)的 Riemann 函数的存在唯一性，就是要讨论定解问题(6)解的存在唯一性，而对于更一般的 Laplace 双曲型方程特征边值问题解的存在唯一性，可以通过化为等价的积分方程组而用逐次逼近法来加以证明，这和常微方程初值问题的情况相似. 下面作粗略的介绍. 设双曲型方程的特征边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u \\ u|_{y=y_1} = \varphi_0(x) \\ u|_{x=x_1} = \varphi_1(y) \end{cases} \tag{9}$$

如果令 $P(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = a(x, y)P(x, y) + b(x, y)Q(x, y) + c(x, y)u$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=a(x,y)P(x,y)+b(x,y)Q(x,y)+c(x,y)u$$

沿着方程的特征线积分，问题(9)就等价于下列积分方程组

$$\left\{\begin{aligned}
P(x,y)&=P(x,y_1)+\int_{y_1}^{y}(a(x,y)P(x,y))\\
&\qquad +b(x,y)Q(x,y)+c(x,y)u(x,y))\mathrm{d}y\\
Q(x,y)&=Q(x_1,y)+\int_{x_1}^{x}(a(x,y)P(x,y)\\
&\qquad +b(x,y)Q(x,y)+c(x,y)u(x,y))\mathrm{d}x\\
u(x,y)&=u(x,y_1)+\int_{y_1}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

其中 $P(x,y_1)=\varphi_0'(x)$，$Q(x_1,y)=\varphi_1'(y)$，$u(x,y_1)=\varphi_0(x)$，为已知函数，此线性积分方程组(10)中，$(P(x,y), Q(x,y), u(x,y))$ 为未知函数组，可应用逐次逼近法来证明解的存在唯一性，且也给出一种具体求解的方法，即取解的零次近似，

$$(P_0(x,y), Q_0(x,y), u_0(x,y))=(\varphi'_0(x), \varphi'_1(y), \varphi_0(x))$$

则根据逐次叠代公式

$$\left\{\begin{aligned}
P_n(x,y)&=\varphi'_0(x)+\int_{y_1}^{y}(a(x,y)P_{n-1}(x,y)\\
&\qquad +b(x,y)Q_{n-1}(x,y)+c(x,y)u_{n-1}(x,y))\mathrm{d}y\\
Q_n(x,y)&=\varphi'_1(y)+\int_{x_1}^{x}(a(x,y)P_{n-1}(x,y)\\
&\qquad +b(x,y)Q_{n-1}(x,y)+c(x,y)u_{n-1}(x,y))\mathrm{d}x\\
u(x,y)&=\varphi_0(x)+\int_{y_1}^{y}Q_{n-1}(x,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}\right.$$

计算出函数组序列 $P_n(x,y)$，$Q_n(x,y)$，$u_n(x,y)$，可以证明，

在 $a(x, y)$，$b(x, y)$，$c(x, y)$，$\varphi'_0(x)$，$\varphi'_1(y)$ 为连续的条件下，当 n 趋于无穷大时，$P_n(x, y)$，$Q_n(x, y)$，$u_n(x, y)$ 的极限 $P(x, y)$，$Q(x, y)$，$u(x, y)$ 给出问题(10)的解，从而 $u(x, y)$ 就是问题(9)的解. 另外根据逐次逼近法也可证明解的唯一性. 据此也就解决了 Riemann 函数的存在唯一性，而且也提供了一种 Riemann 函数的具体求法.

5.4.2 Riémann 方法

设特征边值问题

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y)$$

$$u|_{y=y_0} = \varphi_0(x) \tag{11}$$

$$u|_{x=x_0} = \varphi_1(y),\ \varphi_0(x_0) = \varphi_1(y_0)$$

设 $x \geqslant x_0$，$y \geqslant y_0$，在区域 $\Omega = \{x > x_0,\ y > y_0\}$ 中任取一点 (x_1, y_1)，设 $R(x, y; x_1, y_1)$ 为方程的 Riemann 函数，$u(x, y)$ 为问题(11)的解，则根据积分关系式(7)得

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) = & u(x_0, y_1)R(x_0, y_0; x_1, y_1) \\ & + \int_{y_0}^{y_1} R(x_0, y; x_1, y_1)(\varphi'_1(y) + a(x_0, y)\varphi_1(y))\mathrm{d}y \\ & + \int_{x_0}^{x_1} R(x, y_0; x_1, y_1)(\varphi'_0(x) + b(x, y_0)\varphi_1(x))\mathrm{d}x \\ & + \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R(x, y; x_1, y_1)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{12}$$

这就是通过 Riemann 函数来表示问题(11)解的积分表达式，特别，若 $\varphi_0(x) \equiv 0$，$\varphi_1(y) \equiv 0$，则

$$u(x_1, y_1) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} R(x, y; x_1, y_1)f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \\ u\big|_{y=\mu(x)} = \varphi_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu(x)} = \varphi_1(y) \end{cases} \tag{13}$$

如图5.8设 $y = \mu(x)$，$\mu'(x) < 0$，在区域 $y - \mu(x) \geqslant 0$ 上求解．设 $M_1(x_1, y_1)$ 为区域 $y - \mu(x) > 0$ 内任意一点，过点 M_1 作特征线交曲线 $y = \mu(x)$ 于点 P 和 Q，设 $R(x, y; x_1, y_1)$ 为方程的 Riemann 函数，$u(x, y)$ 为问题(13)的解，在区域 Ω（曲边三角形 M_1PQ）上应用 Green 公式(4)可得

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) = & \left(\frac{1}{2}uR\right)\Big|_P + \left(\frac{1}{2}uR\right)\Big|_Q \\ & + \iint_\Omega R(x, y; x_1, y_1) f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ & - \int_P^Q \left[\frac{1}{2}\left(R\varphi_1 - \varphi_0\frac{\partial R}{\partial y}\right) + a\varphi_0 R\right]\mathrm{d}y \\ & - \left[\frac{1}{2}\left(R\varphi_0 - R\varphi_1\mu' - \varphi_0\frac{\partial R}{\partial x}\right) + b\varphi_0 R\right]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{14}$$

称此为问题(13)解的 Riemann 公式．根据 Riemann 函数的存在唯一性，这就解决了双曲型方程初值问题解的存在唯一性，而且从解的 Riemann 公式可知问题(13)是适定的，而且可以看到解的依赖区域和初始数据的决定性区域等性质，这些性质均由方程的特征线来决定．

特别，若初始数据为零，即 $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0$，则

$$u(x_1, y_1) = \iint_\Omega R(x, y; x_1, y_1) f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如果再令 $f(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$，$(x_0, y_0) \in \Omega$，则

$$u(x_1, y_1) = R(x_0, y_0; x_1, y_1)$$

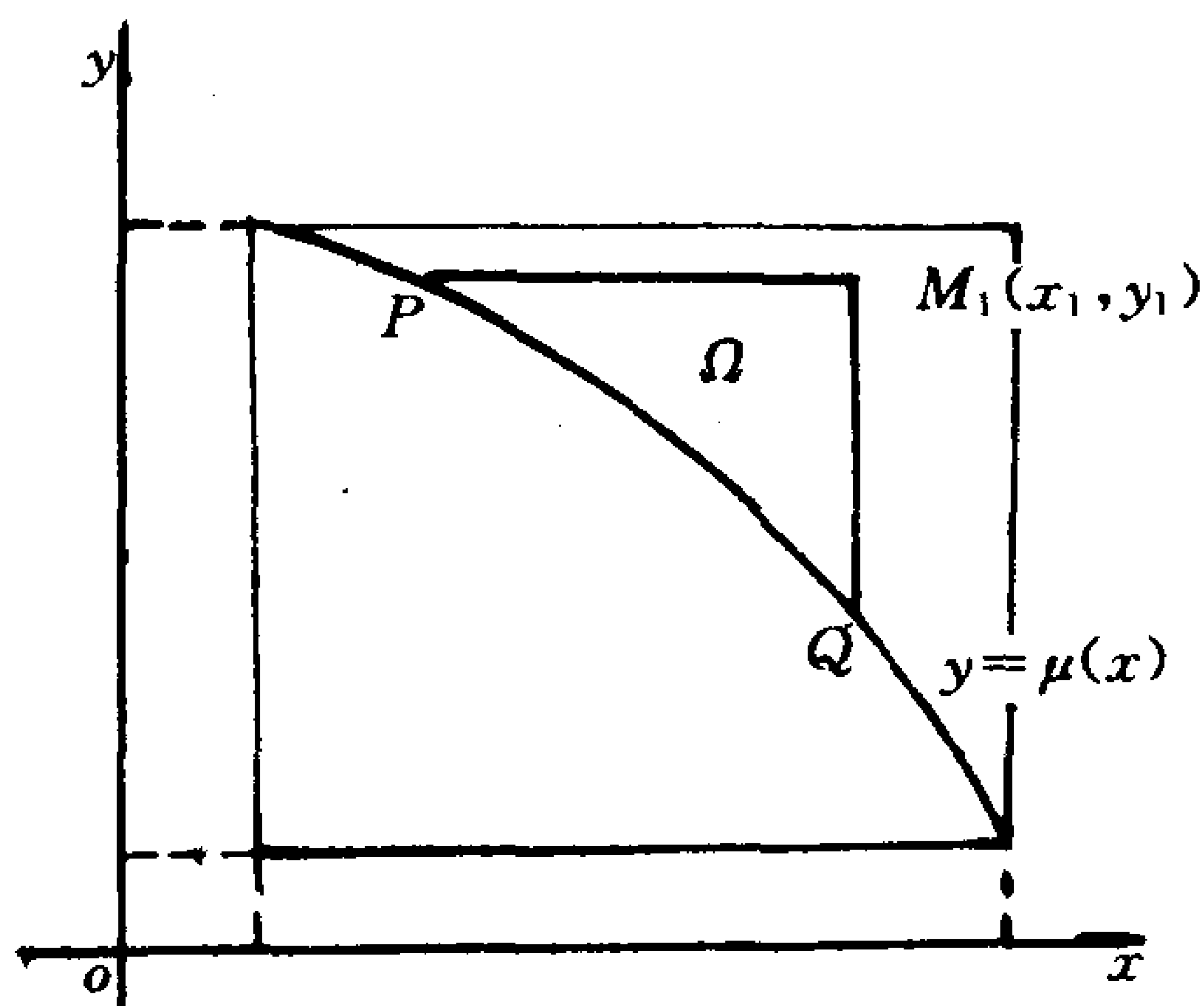


图 5.8

所以 $R(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 物理上可解释为在 (x_0, y_0) 点给一单位脉冲时在点 (x_1, y_1) 得到的响应，而作为 (x_1, y_1) 的函数，当 $(x_0, y_0) \in \Omega$ 时，$R(x_0, y_0; x_1, y_1)$ 满足

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial y_1} + a(x_1, y_1)\frac{\partial R}{\partial x_1} + b(x_1, y_1)\frac{\partial R}{\partial y_1} + c(x_1, y_1)R$$
$$= \delta(x_1 - x_0, y - y_0)$$

当 (x_0, y_0) 在 Ω 之外时，

$$u(x_1, y_1) = 0$$

所以当 $f(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$ 时，$u(x_1, y_1)$ 可以统一的写为

$$u(x_1, y_1) = R(x_0, y_0; x_1, y_1)H(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

用 Riemann 方法还可以讨论两个自变量线性双曲型方程的其它定解问题的适定性.

5.5 Kirchhoff 公式及应用

三维波动方程的 Kirchhoff 公式在求解波动方程的定解问题和科学技术中有较普遍的应用，它也是基于共轭微分算子和分部积分公式(即高斯公式)而建立起来的.

5.5.1 Kirchhoff 公式

设

$$L[u]=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_3 u=f(x,t),\ x\in R^3,\ t\in R^1$$

若相对于时间变量 t 作 Fourier 变换，把时间变量变为频率变量 w，则得

$$L[\bar{u}(x,w)]=\frac{w^2}{a^2}\bar{u}(x,w)+\Delta_3\bar{u}(x,w)=-\bar{f}(x,w)$$

设三维空间 R^3 中的任意一个有界区域 Ω，ξ 是 Ω 内的一个点，设

$$E(x,\xi)=-\frac{1}{4\pi r}e^{-\frac{u}{a}ri}$$

其中 $r=|x-\xi|=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}$，$E(x,\xi)$ 是三维 Helmholtz 方程

$$\Delta_3 V+\frac{w^2}{a^2}V=0$$

的一个向外幅射的基本解.

在区域 Ω 上应用 Gauss 公式得

$$\iiint_{\Omega}E(x,\xi)L[\bar{u}]dx=\bar{u}(\xi,w)+\oiint_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}-\bar{u}\frac{\partial E}{\partial n}\right)dS$$

得

$$\bar{u}(\xi,w)=\iiint_{\Omega}E(x,\xi)\bar{f}(x,w)dx-\oiint_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}-u\frac{\partial E}{\partial n}\right)dS$$

若 $f(x,t)=0$ 时，则

$$\bar{u}(\xi,w)=-\oiint_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial\bar{u}(x,w)}{\partial n}-\bar{u}(x,w)\frac{\partial E}{\partial n}\right)dS$$

或者

$$\bar{u}(x,w)=-\oiint_{\partial\Omega}\left(E\frac{\partial\bar{u}(\xi,w)}{\partial n}-\bar{u}(\xi,w)\frac{\partial E}{\partial n}\right)dS_{\xi}$$

根据 Fourier 变换的性质回到时间域得

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial\Omega}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u(\xi,t-\frac{r}{a})}{\partial n}\right]-u(\xi,t-\frac{r}{a})\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})+\frac{1}{ar}\frac{\partial u(\xi,t-\frac{r}{a})}{\partial t}\right\}\mathrm{d}S_\xi \tag{1}$$

称公式(1)为 Kirchhoff 公式，其中

$$\left[\frac{\partial u(\xi,t-\frac{r}{a})}{\partial n}\right]=\left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial n}\right|_{t=t-\frac{r}{a}}$$

即先对空间变量求方向导数，再对时间变量作后推，Kirchhoff 公式表示通过在边界曲面 $\partial\Omega$ 上 u，$\frac{\partial u}{\partial n}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$ 的后推值表示在时刻 t 时 Ω 内点 x 的值 $u(x,t)$.

如果 $u(x,t)$ 满足非齐次波动方程

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_3 u=f(x,t)$$

则

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\oiint_{\partial\Omega}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u(\xi,t-\frac{r}{a})}{\partial n}\right]-u(\xi,t-\frac{r}{a})\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})+\frac{1}{ar}\frac{\partial u(\xi,t-\frac{r}{a})}{\partial t}\right\}\mathrm{d}S_\xi+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{\Omega}\frac{f(\xi,t-\frac{r}{a})}{r}\mathrm{d}\xi$$

5.5.2 三维波动方程初值问题解的 Poisson 公式

设

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta_3 u=0,\ t>0,\ x\in R^3\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

如果在 Kirchhoff 公式(1)中，选取 Ω 为以 x 为中心，R 为半径的球域 $B_R(x)$，则

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\partial B_R(x)}\left\{R\frac{\partial u(\xi,t-\frac{R}{a})}{\partial n}+u(\xi,t-\frac{R}{a})\right.$$

$$\left.+\frac{R}{a}\frac{\partial u(\xi,t-\frac{R}{a})}{\partial t}\right\}\mathrm{d}S_\xi$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{r=R}\left[\frac{\partial(ru(\xi,t-\frac{R}{a}))}{\partial r}+\frac{R}{a}\frac{\partial u(\xi,t-\frac{R}{a})}{\partial t}\right]\mathrm{d}S_\xi$$

如果取 $R=at$，则

$$u(x,t)=\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{\partial B_{at}(x)}\frac{\partial u(\xi,0)}{\partial t}\mathrm{d}S_\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{\partial B_{at}(x)}u(\xi,0)\mathrm{d}S_\xi\right]$$

$$=\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{\partial B_{at}(x)}\psi(\xi)\mathrm{d}S_\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{\partial B_{at}(x)}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

$$=tM_x^{at}[\psi]+\frac{\partial}{\partial t}[tM_x^{at}[\varphi]]$$

其中 $M_x^{at}[\psi]$ 表示 ψ 在以 x 为中心，at 为半径的球面上的平均值，这样应用 Kirchhoff 公式又重新推出了三维波动方程初值问题解的 Poisson 公式，而且同时解决了解的存在唯一性.

习 题 五

内容包括：共轭微分算子和基本的积分关系式，常微分方程边值问题的 Green 函数，常微分方程边值问题的广义 Green 函数和相容性条件，调和方程和 Helmholtz 方程边值问题的 Green 函数和广义 Green 函数及有解的相容性条件，电像法和固有函数方法求 Green 函数，混合问题的 Green 函数，Riemann 函数和 Riemann 方法.

1. 求下列常微分方程边值问题的 Green 函数 $G(x, \xi)$，并用它表示边值问题的解

(1) $\begin{cases} y''(x) = f(x),\ 0 < x < 1 \\ y(0) = y_0,\ y'(1) + hy(1) = y_1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'' - a^2 y = f(x),\ 0 < x < 1 \\ y(0) = y_0,\ y'(1) = y_1 \end{cases}$

(3)通过问题(1)的 Green 函数，把边值问题

$$\begin{cases} y'' + q(x)y = f(x),\ 0 < x < 1 \\ y(0) = y_0,\ y'(1) + hy(1) = 0 \end{cases}$$

化为等价的积分方程.

2. 求出边值问题

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = f(x),\ 0 < x < 1 \\ y(0) = y_0,\ y'(1) = y_1 \end{cases}$$

有解的相容性条件，求出其广义 Green 函数，当相容性条件成立时用广义 Green 函数写出问题解的积分表示式.

3. 设 $S\text{-}L$ 固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0 \end{cases}$$

的固有值为 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$，相应的固有函数系为 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$. 试求边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x) \\ y(0) = y_0,\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

的 Green 函数，并写出解的表达式.

4. 设边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = f(x, y),\ r < R,\ y > 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ u|_{r=R} = \varphi,\ u|_{y=0} = \psi \end{cases}$$

(1)应用电像法求其 Green 函数.

(2)应用固有函数法求其 Green 函数.

(3)用 Green 函数写出解的积分表达式.

5. 求下列边值问题的 Green 函数

(1) $\begin{cases} \Delta_2 u = f(x, y), x > 0, y > 0 \\ u|_{x=0} = g(y), u|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \Delta_2 u = f(x, y), (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \\ \Omega = \{0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}, z = x + iy\} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Delta_2 u = f(x, y), 0 < x \in \infty, 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = g(y) \\ u|_{y=0} = f_1(x), u|_{y=\pi} = f_2(x) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \Delta_2 u = f(x, y), r = \sqrt{x^2 + y^2} < R, y > 0 \\ u|_{r=R} = \varphi, \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \Delta_2 u = f(x, y), x > 0, y > 0 \\ u|_{x=0} = g(y), \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = f(x) \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \Delta_2 u - k^2 u = f(r, \theta), r < R \\ u|_{r=R} = \varphi(\theta) \end{cases}$

(r, θ) 为极坐标(应用固有函数法).

6. 设 $u(x, y, z) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $f(x, y, z) \in C(\overline{\Omega})$,

$\Delta_3 u + k^2 u = f(x, y, z)$, $\partial\Omega$ 是 Ω 的光滑的边界曲面, n 为 $\partial\Omega$ 的外法向, 证明

(1)当 $(x, y, z) \in \Omega$ 时,

$$u(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\cos kr}{r} f \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{\cos kr}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) \right] \mathrm{d}s$$

(2)当 $(x, y, z) \in \Omega$ 的外部区域时，

$$-\iiint_{\Omega} \frac{\cos kr}{r} f \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta + \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{\cos kr}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r} \right) \right] \mathrm{d}s = 0$$

其中 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

7. 求下列边值问题的 Green 函数

(1) $\begin{cases} \Delta_3 u = f(x, y, z), \ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < R, \ z > 0 \\ u|_{r=R} = \varphi(x, y, z), \ u|_{z=0} = \psi(x, y) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \Delta_3 u + k^2 u = f(x, y, z), \ z > 0 \\ u|_{z=0} = \varphi \\ \text{当 } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty \text{ 时，} \\ \quad u \text{ 满足 Sommerfeld 外辐射条件} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Delta_3 u + k^2 u = f, \ z > 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \varphi \\ \text{当 } r \to \infty \text{ 时，} u \text{ 满足 Sommerfeld 外辐射条件} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \Delta_3 u - k^2 u = f, \ z > 0 \\ u|_{z=0} = \varphi \\ r \to \infty \text{ 时，} u \to \infty \end{cases}$

8. 用固有函数法求下列边值问题的广义 Green 函数，并推出边值问题有解的相容性条件

(1) $\begin{cases} \Delta_2 u = f(x, y), \ r = \sqrt{x^2+y^2} < R \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = \varphi(x, y) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \Delta_2 u + 2\pi^2 u = f(x, y) = \{0 < x < 1, \ 0 < y < 1\} \\ \qquad\qquad (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y) \end{cases}$

9. 求下列混合问题的 Green 函数，并用它表示出问题的解

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = g(t) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = g(t) \end{cases}$

10. 求 Riemann 函数并用 Riemann 方法求解下列问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cu = 0, x > 0, y > 0 \\ u|_{y=0} = \varphi(x), u|_{x=0} = \psi(y) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a x \dfrac{\partial u}{\partial x} + by \dfrac{\partial u}{\partial y} + cu, xy \neq 0 \\ u|_{y=x} = \varphi(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x} = \psi(x) \end{cases}$

(3)设 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f(x)g(y)u = 0$，验证其 Riemann 函数为

$$R(x, y; \xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i!)^2} \left[\int_{\xi}^{x} f(r)\mathrm{d}r\right]^i \left[\int_{\eta}^{y} g(r)\mathrm{d}r\right]^i$$

6 积分方程法和位势理论及其应用

通过积分方程的理论和方法来研究和求解微分方程的定解问题是微分方程理论和方法中一个很重要的方面．例如在常微分方程中通过把初值问题化为等价的积分方程或方程组，然后用逐次逼近法证明了解的存在唯一性，又如通过 Green 函数把微分方程的边值问题化为积分方程的问题，再如把 Laplace 双曲型方程的特征边值问题化为等价的积分方程组，然后也可用逐次逼近法证明解的存在唯一性．本章首先介绍线性积分方程某些理论和方法，接着讨论应用位势理论把偏微分方程的边值问题或混合问题归结为积分方程的某些典型问题．

6.1 线性积分方程基本理论介绍

6.1.1 基本概念和基本假设

设 Ω 是 R^n 中某一有界的光滑区域，$K(x,\xi)$ 是定义在 $\Omega\times\Omega$ 上的已知函数，$f(x)$ 为 Ω 上的已知函数，$\varphi(x)$ 为 Ω 上的未知函数，则称

$$\varphi(x)=\int_{\Omega}K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+f(x) \tag{1}$$

为一个 Fredholm 第二类型的线性积分方程，称 $K(x,\xi)$ 为积分方程的核．

设 $K(x,\xi)$ 不论作为 ξ 的函数或是作为 x 的函数均是绝对可积的，且

$$\int_{\Omega} |K(x, \xi)| \mathrm{d}\xi \leqslant M$$

设 $K(x, \xi)$ 作为 x 的函数或 ξ 的函数时，除了有限个点，有限条一维光滑曲线，有限条二维光滑曲线，…，有限个 $(n-1)$ 维的光滑曲面之外，$K(x, \xi)$ 在 Ω 余下的各点均为连续.

设 $f(x)$ 和待求的未知函数 $\varphi(x)$ 在 Ω 上有界且绝对可积，也设它们们除了在有限个低维的点集外，在 Ω 余下的各点是连续的，且 $|f(x)| \leqslant L$.

若一个函数 $\varphi(x)$ 使等式(1)在 Ω 上几乎处处相等，则称 $\varphi(x)$ 是积分方程(1)的一个解，而两个在 Ω 上几乎处处相等的解视为是同一个解，在所设的函数类中，几乎处处相等就是在连续点上相等.

称积分方程

$$\psi(x) = \int_{\Omega} K(\xi, x)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + g(x) \tag{2}$$

为(1)的共轭方程.

方程(1)和(2)对应的齐次方程分别为

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

$$\psi(x) = \int_{\Omega} K(\xi, x)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

一对互为共轭的方程(1)和(2)是紧密相连的.

设 K 表示以 $K(x, \xi)$ 为核的积分算子，I 表示恒等算子，即

$$K\varphi = \int_{\Omega} K(x, \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$I\varphi = \varphi(x)$$

则积分方程(1)可写为

$$\varphi(x) = K\varphi + f(x)$$

$$(I - K)\varphi = f(x)$$

类似的可把(2)写为

$$\psi(x) = K^*\psi + g(x)$$

$$(I - K^*)\psi = g(x)$$

其中 K^* 表示以 $K^*(x, \xi) = K(\xi, x)$ 为核的积分算子，称 K^* 为 K 的共轭算子.

设 K_1 和 K_2 是两个积分算子，对应的核分别为 $K_1(x, \xi)$ 和 $K_2(x, \xi)$，则定义复合算子 $K_2 \circ K_1$ 为

$$(K_2 \circ K_1)\varphi = K_2(K_1\psi)$$

所以 $K_2 \circ K_1$ 对应的核为

$$\int_\Omega K_2(x, \eta)K_1(\eta, \xi)\mathrm{d}\eta$$

记 $K^2 = K \circ K$ 为 K 的二次幂，它对应的核为

$$K^{(2)}(x, \xi) = \int_\Omega K(x, \eta)K(\eta, \xi)\mathrm{d}\eta$$

称为 K 的二次叠核. 归纳地定义 K 的 m 次幂为 $K^m = K \circ K^{m-1}$，则它的核为

$$\begin{aligned} K^{(m)}(x, \xi) &= \int_\Omega K(x, \eta)K^{m-1}(\eta, \xi)\mathrm{d}\eta \\ &= \int_\Omega \cdots \int_\Omega K(x, \eta_1)K(\eta_1, \eta_2)\cdots K(\eta_{m-1}\xi)\mathrm{d}\eta_1\cdots\mathrm{d}\eta_{m-1} \end{aligned}$$

称之为 K 的 m 次叠核.

6.1.2 积分方程的某些基本理论介绍

在 1 目的假设下，积分方程(1)的基本理论很类似于线性代数方程组的理论.

定理 1 齐次方程 $(I - K)\varphi = 0$ 或者只有零解，或者其解空间是有限维的，即有 N 个线性无关的解 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_N(x)$，使齐次方程的通解为

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(x)$$

定理 2　若 $\varphi_*(x)$ 是非齐次方程 $(I-K)\varphi=f(x)$ 的一个特解，则它的通解是 $\varphi_*(x)$ 加上对应齐次方程的通解.

定理 3　若 $(I-K)\varphi=0$ 有非零解，则 $(I-K^*)\psi=0$ 也必有非零解，且它们解空间的维数相同.

定理 4　若 $(I-K)\varphi=0$ 只有零解，则对于任意的 $f(x)$，$(I-K)\varphi=f(x)$ 均存在唯一解.

定理 5　若 $(I-K)\varphi=0$ 有非零解，则 $(I-K)\varphi=f(x)$ 有解的充分必要条件是 $f(x)$ 满足相容性条件

$$\int_\Omega f(x)\psi(x)\mathrm{d}x=0$$

其中 $\psi(x)$ 是齐次方程 $(I-K^*)\psi=0$ 的解.

定理 6　积分方程的固有值问题

$$(I-\lambda K)\varphi=0 \quad 和 \quad (I-\lambda K^*\psi)=0$$

有相同的固有值，且每一个固有值均是有限重的，且重数相同，即固有函数的空间维数相同.

6.1.3　逐次逼近法和解核

引入参数 λ，一般为复参数，讨论更为一般的积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_\Omega K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+f(x) \tag{5}$$

用逐次逼近法求解得逐次迭代序列

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x)&=f(x)\\
\varphi_1(x)&=f(x)+\lambda K\varphi_0\\
&\vdots\\
\varphi_n(x)&=f(x)+\lambda K\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

若当 n 趋于无穷时，$\varphi_n(x)$ 趋于 $\varphi(x)$，且可以在

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda K_{n-1}\varphi_{n-1}$$

中积分号下求极限，则得出(5)的解 $\varphi(x)$，即

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)) \\ &= f(x) + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \cdots + \lambda^n K^n f + \cdots \\ &= f(x) + (\lambda K + \lambda^2 K^2 + \cdots + \lambda^n K^n + \cdots) f \\ &= (I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \cdots + \lambda^n K^n + \cdots) f\end{aligned}$$

如果用算子来表示，上述公式表明的逆算子为

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \cdots + \lambda^n K^n + \cdots$$

即若

$$(I - \lambda K)\varphi = f(x)$$

则

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (I - \lambda K)^{-1} f \\ &= (I + \lambda K + \cdots + \lambda^n K^n + \cdots) f \\ &= f(x) + \lambda(K + \lambda K^2 + \cdots + \lambda^{n-1} K^n + \cdots) f\end{aligned}$$

又因积分算子 $K + \lambda K^2 + \cdots + \lambda^{n-1} K^n + \cdots$ 的核为

$$\begin{aligned}\Gamma(x, \xi; \lambda) = K(x, \xi) + \lambda K^{(2)}(x, \xi) + \cdots \\ + \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, \xi) + \cdots\end{aligned}$$

其中 $K^{(n)}(x, \xi)$ 是 K 的 n 次叠核，所以得解的积分表达式

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

称 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ 为解核.

在 1 小目的基本假设下可以证明，当 $|\lambda| < \dfrac{1}{M}$ 时逐次迭代序列收敛于方程(5)的解，这时解是存在唯一，且在圆 $|\lambda| < \dfrac{1}{M}$ 内，$\Gamma(x, \xi; \lambda)$ 是 λ 的解析函数，另外可以把 $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ 解析延拓到全平面，这时 $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ 在全平面最多有可列个孤立的奇点 λ_1，λ_2，…，除了这些奇点外 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ 解析，这时方程(5)也存在唯一的解，而且也可以用解核表出

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

$\Gamma(x, \xi; \xi)$ 的全部孤立奇点也就是积分方程固有值问题 $\varphi = \lambda K\varphi$ 的全部固有值. 对于每一个固有值 λ_k.

$$\varphi(x) = \lambda_k K\varphi + f(x)$$

有解的充要条件是

$$\int_\Omega f(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0$$

其中 $\psi(x)$ 是 $\psi(x) = \lambda_k K^*\psi$ 的解.

6.1.4 退化核的积分方程

若再设

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)b_i(\xi)$$

则称

$$\varphi(x) = \lambda\int_\Omega K(x, \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x)$$

为具有退化核的积分方程，不失一般总可设 $a_1(x)$，$a_2(x)$，…，$a_N(x)$ 在 Ω 上线性无关，设 $b_1(x)$，$b_2(x)$，…，$b_N(x)$ 在 Ω 上也线性无关. 对于退化核的积分方程可以直接把之归结为线性代数方程组加以研究和求解，这时的解核 $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ 是 λ 的有理函数.

由于

$$\varphi(x) = \lambda\sum_{i=1}^{N}\left(\int_\Omega b_i(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right)a_i(x) + f(x) \tag{6}$$

所以可设(6)的解为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{i=1}^{N} c_i a_i(x)$$

其中 c_1，…，c_N 是待求的常数，代入方程(6)得线性方程组

$$c_i = f_i + \lambda\sum_{j=1}^{N} m_{ij}c_j,\ i = 1, 2, \cdots, N$$

其中

$$f_i = \int_\Omega b_i(\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

$$m_{ij} = \int_\Omega b_i(\xi) a_j(\xi) \mathrm{d}\xi$$

把线性代数方程组写为

$$(E - \lambda M)C = F \tag{7}$$

其中

$M = (m_{ij})$

E 为 N 阶单位矩阵

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_N)^T$

$F = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^T$

所以积分方程(6)的问题归结成线性代数方程组(7)的问题. 令

$D(\lambda) = (E - \lambda M) = (d_{ij})_{N\times N}$

$\Delta(\lambda) = \det D(\lambda)$

$D_{ij}(\lambda)$ 是 d_{ij} 的代数余子式

则当 $\Delta(\lambda) \neq 0$ 时,

$$C = D^{-1}F$$

故得

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i a_i(x) \\ &= f(x) + \lambda \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{ij} D_{ij}(\lambda) a_i(x) f_j \\ &= f(x) + \lambda \int_\Omega \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) \mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

其中

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_i \sum_j D_{ij}(\lambda) a_i(x) b_j(\xi)$$

此为退化核积分方程(6)的解核.

$\Delta(\lambda) = 0$ 的点是 $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ 的孤立奇点，也就是 $\varphi = \lambda K\varphi$ 的

固有值，这时最多有 N 个不同的固有值，对于每一个固有值 λ_k，积分方程

$$\varphi(x)=\lambda_k K\varphi+f(x)$$

有解的充要条件也就是代数方程组

$$(E-\lambda_k M)C=F$$

有解的充要条件.

在实际应用中，如果把一般核 $K(x,\xi)$ 用退化核来近似，积分方程的问题就归结为线性代数方程组的问题.

例如，设

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1(x\xi^2+x^2\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+f(x)$$

令

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda(c_1x+c_2x^2)$$

得

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{\lambda}{4}\right)c_1-\dfrac{\lambda}{5}c_2=f_1\\ -\dfrac{\lambda}{3}c_1+\left(1-\dfrac{\lambda}{4}\right)c_2=f_2\end{cases}$$

其中

$$f_1=\int_0^1 f(\xi)\xi^2\mathrm{d}\xi$$

$$f_2=\int_0^1 f(\xi)\xi\mathrm{d}\xi$$

最后可得

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\Gamma(x,\xi;\lambda)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

其中

$$\Gamma(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{\lambda^2}{240}}\left(\frac{\lambda}{5}\xi x+\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)\xi^2x\right.$$

$$+\xi x^2\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)-\frac{\lambda}{4}\xi^2x^2\Big)$$

此时积分方程固有值问题

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1(x\xi^2+x^2\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的固有值是 $\lambda_1=60-16\sqrt{15}$，$\lambda_2=60+16\sqrt{15}$.

6.1.5 对称核的积分方程

如果除 1 目的假设外再设 $K(x,\xi)=K(\xi,x)$，且 $K(x,\xi)$ 只取实值，设 $\rho(x)$ 在 Ω 上非负可积，且除了在一些低维的点集外，$\rho(x)>0$，也设除了在一些低维的点集外，$\rho(x)$ 在 Ω 上连续，则称

$$\varphi(x)=\lambda\int_\Omega K(x,\xi)\rho(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

为具有实对称核带有权函数 $\rho(x)$ 的积分方程. 自共轭的微分方程的固有值通过 Green 函数可归结为这种积分方程的固有值问题，其中核就是 Green 函数 $G(x,\xi)$. 对于这种积分方程的固有值问题

$$\varphi(x)=\lambda\int_\Omega K(x,\xi)\rho(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

有许多特殊的理论结果，列述如下.

定理 1 固有值问题(8)的固有值均为实数. 所以对应的固有函数总可取为实值函数.

定理 2 至少存在一个固有值.

定理 3 不同的固有值对应的固有函数在 Ω 上带权 $\rho(x)$ 正交.

定理 4 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 是(8)的全部固有值. 对每一个固有值对应的固有函数空间中总可选取有限个在 Ω 上带权 $\rho(x)$ 的标准正交的固有函数作为固有函数空间的一组基，设把这些固有函数

全部列出得固有函数系 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_i(x)$，… 它们是 Ω 上带权 $\rho(x)$ 的标准正交组，为了简单计设 $\varphi_i(x)$ 是属于固有值 λ_i 的固有函数. 由于可能有重固有值，所以 λ_1，λ_2，… 中有些可以相等. 则

$$K(x, \xi) = \sum_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \tag{9}$$

称此为核 $K(x, \xi)$ 按标准正交的固有函数展开的双线性公式. 特别，如果只有有限个固有值. 则 $K(x, \xi)$ 必然只能是对称的退化核. 反之若 $K(x, \xi)$ 是非退化的对称核，则固有值问题(8)一定有无穷可列个固有函数，这时等式(9)至少在均方收敛的意义下成立.

定理 5　设 λ 不是(8)的固有值，则对于任意的 $f(x)$，积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_\Omega K(x, \xi)\rho(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x)$$

的解为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_\Omega \Gamma(x, \xi, \lambda)\rho(\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{10}$$

其中解核

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \sum_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda - \lambda_i}$$

λ_i 是(8)的固有值，φ_i 是定理 4 中所述的固有函数.

定理 6　设 $\lambda = \lambda_l$ 是(8)的一个固有值，$\varphi_{l1}(x)$，$\varphi_{l2}(x)$，…，$\varphi_{ls}(x)$ 为对应的固有函数空间的带权 $\rho(x)$ 在 Ω 上的标准正交基，则

$$\varphi(x) = \lambda_l\int_\Omega K(x, \xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x)$$

有解的充要条件是

$$\int_\Omega f(x)\varphi_{l_j}(x)\mathrm{d}x, \ j = 1, 2, \cdots, s$$

当 $f(x)$ 满足此条件时，所列积分方程的解为

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{s} c_j \varphi_{l_j}(x) + \int_{\Omega} \sum_{\lambda_i \neq \lambda_l} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_l - \lambda_i} f(\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x) \tag{11}$$

6.1.6 Volterra 第二型线性积分方程

在 1 目所设的积分方程(1)中. 如果再设 Ω 是一个 R^n 中的一个正方体域 $\{0 < x_1 < a, \cdots, 0 < x_n < a\}$，且当 ξ 有一个坐标分量 ξ_i 小于对应于 x 的坐标分量 x_i 时，$K(x, \xi) = 0$，则积分方程(5)变为

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n} K(x, \xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x) \tag{12}$$

称此积分方程为 Volerrra 第二型积分方程. 对于此种方程，对于任意的 $f(x)$ 和参数 λ 它总存在唯一的解，逐次迭代序列总收敛于方程的解，其解核 $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ 在全平面是 λ 的解析函数.

已上各小目所得到的关于 Fredholm 第二型积分方程的各种结果称为 Fredholm 理论，这是由于 Fredholm 对此种方程进行了系统的研究并得出了许多基本的定理. 上述 Fredholm 理论还可以推广到线性积分方程组，另外在 Fredholm 第二型积分方程中，基本的积分区域 Ω 还可以是一闭曲面或闭曲线.

6.1.7 Fredholm 第一型积分方程

称

$$\int_{\Omega} K(x, \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x) \tag{13}$$

为 Fredholm 第一型线性积分方程，第一型积分方程的研究较为困难，通常是无解的，还缺乏系统的理论. 但是相应的 Volterra 第一型积分方程通常其解也是存在的，而且再作一些补充假设时，还可把之转化为 Volterra 第二型的积分方程. 例如对于一维

Volterra 第一型方程

$$\int_0^x K(x, \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x)$$

两边对 x 求得，则得

$$K(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x)$$

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{f(x)}{K(x, x)}$$

6.1.8 奇异积分方程

在积分方程(1)中，若设核为

$$K(x, \xi) = \frac{K_1(x, \xi)}{|(x-\xi)|^\alpha}$$

其中 $K_1(x, \xi)$ 在 $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ 上连续，则当 $\alpha < n$ 时，满足 1 目中关于核的基本假设，Fredholm 理论成立. 但当 $\alpha \geqslant n$ 时，由于核的奇性太高，Fredholm 理论不再成立，称这种方程为奇异积分方程，奇异积分方程是近代数学研究的一重大课题，在理论和应用中具有重大意义.

6.2 三维位势理论和调和方程的边值问题

6.2.1 位势理论介绍

应用位势来讨论一般区域上三维调和方程边值问题是一有效和有构造性的方法，且有很明显的物理意义.

设 M 和 P 是 R^3 中的任意两个点，其坐标分别为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 和 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$，记 $r_{MP} = |x - \xi| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}$，设 x 为自变量，ξ 为参

变量，则有

$$\Delta_3 \frac{1}{r_{MP}} = 0,\ x \neq \xi$$

或者

$$\Delta_3 \frac{1}{r_{MP}} = -4\pi\delta(x-\xi)$$

其物理意义是当在点 ξ 放置一单位正电荷时，则在自由空间产生的电位分布为 $\frac{1}{r_{MP}}$，由此三维调和方程的基本解可构造三维调和方程的其它的解.

设 Ω 是 R^3 中一光滑有界的区域，它的边界 S 是一个适当光滑的闭曲面，通常称之为李雅普诺夫曲面，则可构造下列三个位势函数

$$u(M) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} \mathrm{d}P \tag{1}$$

$$u(M) = \iint\limits_{S} \frac{\omega(P)}{r_{MP}} \mathrm{d}S_P \tag{2}$$

$$u(M) = \iint\limits_{S} \gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}} \mathrm{d}S_P \tag{3}$$

其中 n 为 S 的外法向，分别称之为体位势，单位层势和双层势，$\rho,\ \omega,\ \gamma$ 分别称之为相应位势的密度. 在静电学中，体位势表示在 Ω 上以 $\rho(P)$ 为体密度的电荷分布在自由空间产生的电位分布，单层势表示在 S 上以 $\omega(P)$ 为面密度的电荷分布在自由空间产生的电位分布，双层势则表示在 S 上以 $\gamma(P)$ 为偶极子电荷分布密度在自由空间产生的电位，所以双层势又称为偶极位势.

如图 6.1 所示双层位势又可写为

$$u(M) = -\iint\limits_{S} \gamma(P) \frac{\cos\varphi}{r_{MP}} \mathrm{d}S_p$$

$$= -\iint\limits_{S} \gamma(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP},\ n_p)}{r_{MP}^2} \mathrm{d}S_p$$

其中 n_P 表示 S 上 P 点的单位外法向. **如果 $\gamma(P)\equiv 1$，则双层势**

$$\alpha(M)=\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}S_P$$

的几何意义是从点 M 看闭曲面 S 的外侧的立体解，根据此几何意义可直接得出

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}S_P=\begin{cases}-4\pi, & M\in\Omega\\ -2\pi, & M=N\in S\\ 0, & M\in\Omega\text{ 的外部区域}\end{cases}\tag{4}$$

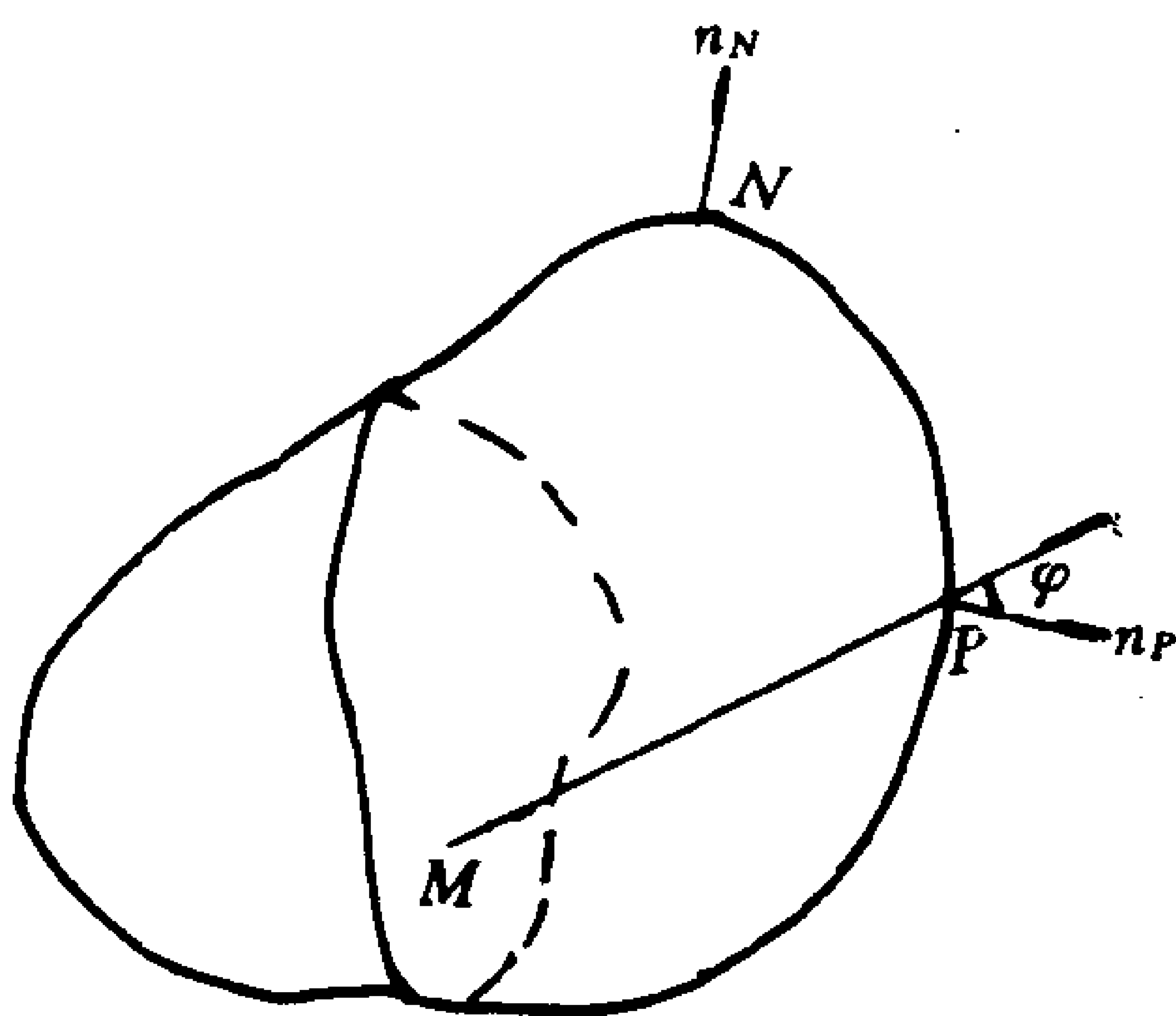


图 6.1

三个位势是三个含参变量的积分，所谓位势论就是有关此三个积分的性质的理论，根据位势的物理意义和几何意义也可对这些理论结果进行直观的解释.

定理 1 如果 ρ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，即 $\rho(P)\in C(\overline{\Omega})$ 则体位势(1)具有下列性质：

(i) 在全空间 $u(M)$ 连续

(ii) 在全空间一阶偏导数存在，且可以在积分号下求导数

(iii) 在 Ω 的外部区域，$u(M)$ 满足

$$\Delta_3 u(M)=0$$

(iv) 若设 $\rho(P)\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，则在 Ω 内，$u(M)$ 满足

$$\Delta_3 u(M)=-4\pi\rho(M)$$

只要积分号下求导，即可证明(iii). 如果采用形式的运算，也采用积分号下求导，则(iv)的形式的证明是

$$\Delta_3 u(M)=\iiint_\Omega \rho(P)\Delta_3\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}P$$

$$= \iiint_{\Omega} \rho(P)(-4\pi\delta(M-P)\mathrm{d}P$$

$$= -4\pi\rho(M)$$

当然从古典分析的观点，是不能积分号下求导的.

定理 2　若 $w(P)$ 在 S 上连续，则单位层位势

$$u(M) = \iint_{S} \frac{\omega(P)}{r_{MP}} \mathrm{d}S_p$$

具有下列性质：

(i)　$u(M)$ 在全空间 R^3 中连续

(ii)　在 Ω 内或 Ω 的外部区域，均有

$$\Delta_3 u(M) = 0$$

(iii)　当 M 点沿着 S 上点 N 的法线穿过曲面 S 上的点 N 时，$u(M)$ 的外法向导数发生跳跃，具有

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_i = \iint_{S} \frac{\omega(P)\cos(\vec{r}_{NP}, n_N)}{r_{NP}^2} \mathrm{d}S_p + 2\pi\omega(N)$$

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_e = \iint_{S} \frac{\omega(P)\cos(\vec{r}_{NP}, n_N)}{r_{NP}^2} \mathrm{d}S_p - 2\pi\omega(N)$$

其中 N 是 S 上任意固定的点，上述式子中右端的积分是收敛的奇异积分，$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_i$ 表示 $\frac{\partial u(M)}{\partial n_N}$ 当点 M 沿着 N 的法线从 Ω 内部趋于 N 的极限. $\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_e$ 表示 $\frac{\partial u(M)}{\partial n_N}$ 当点 M 沿着 N 点的法线从 Ω 的外部趋于 N 的极限.

它的物理意义表明，在 S 上的面电荷密度 $W(P)$ 的电荷分布在自由空间产生的电场强度当通过曲面 S 时法向分量发生间断，其跃度是 $4\pi w(N)$.

定理 3　设 $\gamma(P)$ 在 S 上连续，则双层位势

$$u(M) = -\iint_{S} \gamma(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, n_P)}{r_{MP}^2} \mathrm{d}S_p$$

具有下列性质：

(i) 当 $M = N$ 为曲面上的点时，此位势的积分是收敛的，并记为

$$u(N) = -\iint_S \gamma(P)\frac{\cos(\vec{r}_{NP}, n_P)}{r_{NP}^2}\mathrm{d}S_p$$

(ii) 当 M 沿着过 S 的点 N 的法线穿过点 N 时，双层势发生间断，且有

$$(u(N))_i = u(N) - 2\pi\gamma(N)$$

$$(u(N))_e = u(N) + 2\pi\gamma(N)$$

其物理意义是以在 S 上的偶极子密度 $\gamma(P)$ 的电荷分布在自由空产生的电位在 S 上的点 N 发生间断，其跃度为 $4\pi\gamma(N)$.

(iii) 当点 M 在 Ω 内或 Ω 的外部区域时，双层势满足

$$\Delta_3 u(M) = 0$$

定理 4 设 ρ, ω, γ 均为连续，则三个位势当 $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \to +\infty$ 时均趋于零，且

$$体位势 = O(\frac{1}{r})$$

$$单层势 = O(\frac{1}{r})$$

$$双层势 = O(\frac{1}{r^2})$$

6.2.2 调和方程的边值问题

本目讨论用位势来表示调和方程一般域下边值问题解的可能性. 如果用位势来表示调和方程边值问题的解，则把问题转化为积分方程的问题，通过对积分方程的讨论就可以得出关于边值问题的某些定量或定性的性质.

问题一 内部区域的第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, M \in \Omega \\ u|_s = f(N) \end{cases}$$

问题二　外部区域的第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \qquad M \in \Omega \text{ 的外部区域} \\ u|_S = f(N) \\ \lim\limits_{|r|\to\infty} u = 0 \end{cases}$$

问题三　内部区域的第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \ M \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(N) \end{cases}$$

问题四　外部区域的第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \ M \in \Omega \text{ 的外部区域} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(N) \\ \lim\limits_{|r|\to\infty} u = 0 \end{cases}$$

若用双层位势来表示问题一的解

$$u(M) = -\iint \gamma(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, n_P)}{r_{MP}^2} \mathrm{d}S_p, \ M \in \Omega$$

则根据边界条件和位势的理论可得

$$f(N) = -\iint \gamma(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, n_P)}{r_{NP}^2} \mathrm{d}S_p - 2\pi\gamma(N)$$

即

$$\gamma(N) = \iint \gamma(P) K(N, P) \mathrm{d}S_P - \frac{1}{2\pi} f(N) \tag{5}$$

其中

$$K(N, P) = \frac{-1}{2\pi} \frac{\cos(\vec{r}_{NP}, n_P)}{r_{NP}^2}$$

问题(5)是一个关于未知函数 $\gamma(P)$ 的 Fredholm 第二型积分方程，可以证明(5)对应的齐次方程只有零解，根据 Fredholm 理论，方程(5)对任意的 f 均存在唯一的解. 这样就证明了调和方程关于一般区域 Ω 的第一边值问题的解是存在的，而且其解可用双层势来表示，双层势的密度是唯一确定的.

如果也用双层势来表示问题二的解 $u(M)$．则根据位势理论和边值条件得

$$f(N)=-\iint\gamma(P)\frac{\cos(\vec{r}_{NP},n_P)}{r_{NP}^2}dS_p+2\pi\gamma(N)$$

即

$$\gamma(N)=-\iint\limits_S K(N,P)\gamma(P)\mathrm{d}S_p+\frac{1}{2\pi}f(N) \tag{6}$$

方程(6)对应的齐次方程

$$y(N)=-\iint\limits_S K(N,P)y(P)\mathrm{d}S_p \tag{7}$$

根据有关立体角的公式(4)，(7)有一个非零解 $y_0(N)\equiv 1$．且可证明它没有其它线性无关的解．根据积分方程的理论，(7)的共轭方程

$$z(N)=-\iint\limits_S K(P,N)z(P)\mathrm{d}S_p \tag{8}$$

的解空间也是一维的，设它有一个非零解为 $z_0(N)$，根据积分方程的理论，积分方程(6)有解的充要条件是

$$\iint\limits_S f(N)z_0(N)\mathrm{d}S_p=0 \tag{9}$$

当此相容性条件成立时，积分方程的(6)通解为

$$\gamma(P)=C+\gamma_*(P)$$

其中 C 是任意常数，$\gamma_*(P)$ 是(6)的某一个解．这时问题二的解可表为

$$\begin{aligned}u(M)&=-\iint\limits_S(C+\gamma_*(P))\frac{\cos(\vec{r}_{MP},n_P)}{r_{MP}^2}\mathrm{d}S_p\\&=-\iint\limits_S\gamma_*(P)\frac{\cos(\vec{r}_{MP},n_P)}{r_{MP}^2}\mathrm{d}S_p,\quad M\in\Omega\text{ 的外部区域}\end{aligned}$$

这种解当 $r\to\infty$ 时，$u(M)=O(\frac{1}{r^2})$．但是当 $f(N)$ 不满足条件(9)时，外部区域的第一边值问题的解也是存在唯一的，这时其

解不能用一个双层势来表示．若设原点包含在 Ω 区域内，而可设解为

$$u(M)=\frac{c}{r}+v(M)$$

则

$$\begin{cases}\Delta_3 v(M)=0\\ v|_s=f(N)-\left.\dfrac{c}{r}\right|_S=f(N)-\dfrac{c}{r_{ON}}\end{cases}$$

选择常数 c 满足

$$\iint_S f(N)z_0(N)\mathrm{d}s_N=c\iint_S\frac{1}{r}z_0(N)\mathrm{d}s_N$$

则 $v(M)$ 可表为一个双层热，其密度函数由

$$\gamma(N)=-\iint_S K(N,P)\gamma(P)\mathrm{d}s_P+\frac{1}{2\pi}\left(f(N)-\frac{c}{r_{ON}}\right)$$

来确定，且除了一个常数项外，其密度 $\gamma(N)$ 唯一确定．

若用单层势来表示内部区域第二边值问题三的解

$$u(M)=\iint_S w(P)\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}S_p,\ M\in\Omega$$

则根据位势理论和边值条件得

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_i=\iint_S\frac{\omega(P)\cos(\vec{r}_{NP},n_N)}{r_{NP}^2}\mathrm{d}S_p+2\pi\omega(N)$$

$$f(N)=\iint_S w(P)\frac{\cos(\vec{r}_{NP},n_N)}{r_{NP}^2}\mathrm{d}S_p+2\pi\omega(N)$$

$$w(N)=\iint_S w(P)K_1(N,P)\mathrm{d}S_p+\frac{1}{2\pi}f(N)\qquad(10)$$

其中

$$K_1(N,P)=-_S\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{NP},n_N)}{r_{NP}^2}$$
$$=-K(P,N)$$

所以(10)对应的齐次方程就是方程(8)．(8)对应的基解是

$z_0(N)$，(8)对应的共轭方程的基解为 $y_0(N)\equiv 1$，所以得：(10)有解的充分必要条件是满足条件

$$\iint\limits_S f(N)\mathrm{d}S_N = 0$$

当此条件满足时，(10)的通解是

$$w(N) = cz_0(N) + w_*(N)$$

其中 c 是任意常数，$w_*(N)$ 是(10)的一个特解，这时内部区域第二边值问题的解总可用单层势来表示

$$u(M) = c\iint\limits_S z_0(P)\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}s_p + \iint\limits_S w_*(P)\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}s_p \quad M\in\Omega$$

而且由于内部区域调和方程第二边值问题的解在可相差一个常数的意义下是唯一的，所以必然可得

$$\iint\limits_S z_0(P)\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}s_p = \text{常数} \neq 0, \quad M\in\Omega$$

若用单层势来表示 Ω 的外部区域调和方程第二边值问题四的解

$$u(M) = \iint\limits_S w(P)\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}s_p \quad M\in\Omega \text{ 的外部区域}$$

则根据位势理论和边值条件可得积分方程

$$w(N) = -\iint\limits_S w(P)K_1(N,P)\mathrm{d}s_P - \frac{1}{2\pi}f(N) \qquad (11)$$

由于

$$-K_1(N,P) = K(P,N)$$

所以积分方程(11)对任意的 f 总存在唯一的解．相应地可知调和方程外部区域的第二边值问题四的解总是存在唯一的，且可用单层位势来表示，单层势的密度是唯一的．且从(11)式两边在 S 上积分可得

$$\iint\limits_S w(N)\mathrm{d}s_N = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S f(N)\mathrm{d}s_N$$

综上所述，积分方程(5)，(6)，(10)，(11)解的存在唯一性及可解的条件，均和以 $K(N, P)$ 为核的积分方程的固有值问题

$$\varphi(N)=\lambda\iint_S K(N, P)\varphi(P)\mathrm{d}s_P \tag{12}$$

紧密相关，前面用到的结论是：$\lambda=1$ 不是(12)的固有值，所以积分方程(5)和(11)的解总是存在且唯一的. $\lambda=-1$ 时，为固有值问题(12)的单重固有值，且对应的固有函数 $\varphi(N)\equiv 1$. 相对应的共轭积分方程的固有函数是 $z_0(N)$. 所以积分方程(6)有解的充要条件是 $\iint_S f(N)z_0(N)\mathrm{d}s_N$，而积分方程(10)有解的充要条件是 $\iint_S f(N)\mathrm{d}s_N=0$.

问题五　内部区域的第三边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\ M\in\Omega\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\Bigg|_S=f(N)\end{cases}$$

$h>0$，则可用单层热表示其解

$$u(M)=\iint_S w(P)\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}s_P$$

根据位势的理论和边界条件可得

$$w(N)=\frac{-1}{2\pi}\iint_S w(P)\left[\frac{h}{r_{NP}}+\frac{\cos(\vec{r}_{NP}, n_N)}{r_{NP}^2}\right]\mathrm{d}s_P + \frac{1}{2\pi}f(N) \tag{13}$$

此积分方程的解对任意的 $f(N)$ 总是存在唯一的.

如果把内部区域的第一边值问题一的解表为单层势

$$u(M)=\iint_S w(P)\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}s_P,\ M\in\Omega$$

则根据位势理论和边值条件得

$$f(N) = \iint_S w(P) \frac{1}{r_{NP}} \mathrm{d}s_P$$

在一般情况，此 Fredholm 第一型积分方程无解，也就是 $u(M)$ 不能用单层位势表示.

6.3 二维位势理论和调和方程的边值问题

二维位势理论和二维调和方程边值问题的关系和三维的情况有许多相似.

6.3.1 **二维位势理论简介**

设 Ω 是平面上的一个区域，S 是它的边界，设 S 是一适当光滑的闭曲线，通常也称为李雅普诺夫闭曲线，设 M 和 P 为 R^2 中两个点，M 的坐标为 $x = (x_1, x_2)$，P 点的坐标为 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$，$r_{MP} = |x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$，设 x 为自变量，ξ 为参变量，则

$$\Delta_2 \ln \frac{1}{r_{MP}} = - 2\pi\delta(x - \xi)$$

根据此基本解可定义三个位势函数

$$u(M) = \iint_\Omega \rho(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} \mathrm{d}P \tag{1}$$

$$u(M) = \int_S w(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} \mathrm{d}l_P \tag{2}$$

$$u(M) = \int_S \gamma(P) \ln \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}} \mathrm{d}l_P \tag{3}$$

分别称之为平面位势，二维(平面)单位势和二维双层势，称 ρ，ω，γ 为相应位势的密度函数，双层位势又称为偶极子位势.

显然双层势又可写为

$$u(M) = -\int_S \gamma(P)\frac{\cos(\vec{r}_{MP},\ n_P)}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p$$

而当 $\gamma(P) \equiv 1$ **时，双层势的几何意义是从平面上的点看闭曲线** S **外侧的平面角，所以可得**

$$-\int_s \frac{\cos(\vec{r}_{NP},\ n_N)}{r_{MP}}\mathrm{d}l_P = \begin{cases} -2\pi, & M \in \Omega \\ -\pi, & M = N \in S \\ 0, & M \in \Omega \text{ 的外部区域} \end{cases} \tag{4}$$

平面的三个位势有下列性质：

定理 1　若 $\rho(P) \in C(\overline{\Omega})$，则平面势

$$u(M) = \iint_\Omega \rho(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}P$$

具有性质：

(i)　在 R^2 中连续

(ii)　在 R^2 中一阶导数存在，且可以积分号下求偏导数.

(iii)　在 Ω 内或在 Ω 的外部区域，均满足调和方程

$$\Delta_2 u(M) = 0$$

(iv)　若 $\rho(P) \in C(\overline{\Omega})C^1(\Omega)$，则 $M \in \Omega$ 时，$u(M)$ 满足 $\Delta_2 u(M) = -2\pi\rho(M)$.

定理 2　若 $w(P)$ 连续，则单位层势

$$u(M) = \int_S w(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_P$$

具有性质：

(i)　在 R^2 上连续

(ii)　在 Ω 内和 Ω 的外部区域均满足 $\Delta_2 u(M) = 0$.

(iii)　当点 M 沿着 S 上的点 N 的法线穿过 S 上的点 N 时，$u(M)$ 的法向导数发生间断，且

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_i = \int_S w(P)\frac{\cos(\vec{r}_{NP},\ n_N)}{r_{NP}}\mathrm{d}l_p + \pi\omega(N)$$

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_e = \int_S w(P)\frac{\cos(\vec{r}_{NP}, n_N)}{r_{NP}}\mathrm{d}l_p - \pi\omega(N)$$

定理 3　当 $\gamma(P)$ 连续时，则双层势

$$u(M) = -\int_S \gamma(P)\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, n_P)}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p$$

且有下列性质：

(i)　当 $M = N \in S$ 时，积分收敛，并记

$$u(N) = -\int_S \gamma(P)\frac{\cos(\vec{r}_{NP}, n_P)}{r_{NP}}\mathrm{d}l_p$$

(ii)　当 M 在 Ω 内或 Ω 的外部区域时，$\Delta_2 u(M) = 0$.

(iii)　当 M 沿着 S 的点 N 的法线穿过点 N 时，双层势发生间断，且

$$(u(N))_i = u(N) - \pi\gamma(N)$$
$$(u(N))_e = u(N) + \pi\gamma(N)$$

定理 4　当 $r = r_{OM} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$ 时，则平面位势和单层势均有 $\ln\frac{1}{r}$ 的奇性. 而双层势则趋于零. 而且当 $r \to \infty$ 时单层势也趋于零的充要条件是密度函数 $w(P)$ 具有性质 $\int_S w(P)\mathrm{d}l_p = 0$. 所以当 $r \to \infty$ 时，二维位势和三维的位势的性态有较大的差别.

6.3.2　调和方程的边值问题

类似于三维的情况，先讨论用单层势或双层势来表示下列四个边值问题的解.

问题一　内部区域的第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u(M) = 0, & M \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f(N) \end{cases}$$

设

$$u(M) = \int_S \gamma(P)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_P$$

则根据位势的性质和边值条件得积分方程

$$\gamma(N) = \int_S K(N, P)\gamma(P)\mathrm{d}l_p - \frac{1}{\pi}f(N) \tag{5}$$

其中

$$K(N, P) = -\frac{1}{\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{NP}, n_P)}{r_{NP}}$$

积分方程(5)对任意 $f(N)$ 存在唯一的解 $\gamma(N)$，从而得问题一的解是存在的，且可用双层势来表示，双层势的密度是唯一确定的.

问题二　外部区域的第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, M \in \Omega \text{ 的外部区域} \\ u|_s = f(N) \\ u(M) \text{ 保持有界} \end{cases}$$

如果设

$$u(M) = \int_S \gamma(P)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p$$

则根据位势论和边界条件得积分方程

$$\gamma(N) = -\int_S K(N, P)\gamma(P)\mathrm{d}l_P + \frac{1}{\pi}f(N) \tag{6}$$

它对应的齐次方程为

$$y(N) = -\int_S K(N, P)y(P)\mathrm{d}l_P \tag{7}$$

根据关于平面角的公式(4)，(7)有一个非零解 $y_0(N) = 1$，且可证明(7)无其它线性无关的解. 所以(7)的共轭方程

$$z(N) = -\int_S K(P, N)z(P)\mathrm{d}l_P \tag{8}$$

也恰有一个线性无关的解 $z_0(N)$，而积分方程(6)有解的充要条件是

$$\int_S f(N)z_0(N)\mathrm{d}l_N = 0 \tag{9}$$

当此条件成立时，积分方程(6)的解为

$$\gamma(N) = c + \gamma_*(N)$$

其中 c 是任意常数，此时问题二的解为

$$u(M) = \int_S (c + \gamma_*(P))\left(\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right)\mathrm{d}l_P$$

$$= \int_S \gamma_*(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{MP}}\right)\mathrm{d}l_P,\ M \in \Omega \text{ 的外部}$$

当条件(9)不满足时，问题二的解仍然是存在唯一的，但解不能用一个双层势来表示，此时可令

$$u(M) = c + v(M)$$

则

$$\begin{cases} \Delta_2 v(M) = 0 & M \in \Omega \text{ 的外部} \\ v|_S = f(N) - c \end{cases}$$

选取 c．使

$$\int_S f(N) z_0(N)\mathrm{d}l_N = c\int_S z_0(N)\mathrm{d}l_N$$

则 $v(M)$ 可用双层势来表示，这种选取的可能性是由于可证明 $\int_S z_0(N)\mathrm{d}l \neq 0$，所以二维调和方程外部区域的第一边值问题二的解总可以表示为一个常数和一个双层势的和，此常数 c 也就是 $r \to \infty$ 时，$u(M)$ 的极限值，而且可以由边界值 $f(N)$ 确定得．

$$c = \frac{\int_S f(N) z_0(N)\mathrm{d}l}{\int_S z_0(N)\mathrm{d}l}$$

问题三　内部区域的第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 & M \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(N) \end{cases}$$

设

$$u(M)=\int_S w(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p$$

根据位势论和边界条件可得积分方程

$$w(N)=\int_S w(P)K_1(N,P)\mathrm{d}l_p+\frac{1}{\pi}f(N) \qquad (10)$$

其中

$$K_1(N,P)=\frac{-1}{\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{NP},n_N)}{r_{NP}}$$
$$=-K(P,N)$$

所以方程(10)对应的齐次方程恰有一个线性无关的解 $z_0(N)$，积分方程(10)有解的充要条件是 $\int_S f(N)\mathrm{d}l=0$，当此条件成立时(10)的通解为

$$w(N)=cz_0(N)+w^*(N)$$

c 是任意常数，$w_*(N)$ 是(10)的一个特解. 这时问题三的解为

$$u(M)=c\int_S z_0(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p+\int_S w_*(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p$$

而且由于内部区域第二边值问题的解除了一个常数项外是唯一确定的，所以必有

$$\int_S z_0(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p=\text{常数}\neq 0$$

问题四　外部区域的第二边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u(M)=0, & M\in\Omega \text{ 的外部区域}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_s=f(N) & \\ u(M)\text{ 有界} & \end{cases}$$

如果令

$$u(M)=\int_S w(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_p, \quad M\in\Omega \text{ 的外部}$$

则根据位势的性质和边界条件可得

$$w(N) = -\int_S w(P)K_1(N, P)\mathrm{d}l_p - \frac{1}{\pi}f(N) \tag{11}$$

由于

$$-K_1(N, P) = K(P, N)$$

所以和积分方程(5)一样,对任意 f,方程(11)存在唯一解 $w(N)$,但在一般条件下,当 $r\to\infty$ 时 $u(M)$ 的奇性和 $\ln\frac{1}{r}$ 相同而不有界,根据位势理论,要用单层位势表示的解在 $r\to\infty$ 时有界,其充分必要条件是

$$\int_S w(P)dl_P = 0$$

而由于 $w(N)$ 满足(11). 在(11)中两边沿着 S 进行曲线积分,并注意到公式(4)可知

$$2\int_S w(N)\mathrm{d}l_N = -\frac{1}{\pi}\int_S f(N)\mathrm{d}l_N$$

所以

$$\int_S w(N)\mathrm{d}l_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_S f(N)\mathrm{d}l_N = 0$$

所以当 $\int_S f(N)\mathrm{d}l_N = 0$ 时,问题四的解一定可以表示为一个单层势和一个任意常数之和. 又因为问题四的解除了任意一个常数项外是唯一的,所以当 $\int_S f(N)\mathrm{d}l_N \neq 0$ 时,在 Ω 的外部区域第二边值问题的解必然是无界的,且具有 $\ln\frac{1}{r}$ 的奇性,这又表现出三维问题和二维问题的差别.

类似的可把内部区域二维调和方程的第三边值问题的解用一个单层位势来表示,其密度函数所满足的积分方程总是存在唯一的解.

6.4 Helmholtz 方程对应的位势和边值问题

6.4.1 三维 Helmholtz 方程的位势论

设

$$\Delta_3 u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

设 M 和 P 为 R^3 中的两个点，其坐标分别为 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 和 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，且

$$r_{MP} = |x-\xi| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}$$

则方程(1)的基本解为

$$E(x, \xi, k) = \frac{\mathrm{e}^{-ikr_{MP}}}{4\pi r_{MP}}$$

它满足

$$\Delta_3 E + k^2 E = \delta(x-\xi)$$

根据此基本解可以作出相应的位势. 设 Ω 是 R^3 中的有界光滑区域，S 是 Ω 的边界，S 是一适当光滑的闭曲面，则可作出位势

$$u(M) = \iint_S w(P)\frac{\mathrm{e}^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}}\mathrm{d}s_P$$

$$v(M) = \iint_S v(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}}\right)\mathrm{d}s_P$$

分别称之为单层势和双层势，称 $w(P)$ 和 $\gamma(P)$ 为相应位势的密度. 类似于三维调和方程的位势理论可以建立此种位势的相应理论，例如有下列定理.

定理 1 设 $w(P)$ 连续，则单位势

$$u(M) = \iint_S w(P)\frac{\mathrm{e}^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}}\mathrm{d}s_P$$

具有下列性质：

(i) $u(M)$ 在 R^3 中连续

(ii) 在 Ω 内和 Ω 的外部区域均满足

$$\Delta_3 u + k^2 u = 0$$

(iii) 当 M 沿着 S 的点 N 的法线趋于点 N 时，$\dfrac{\partial u(M)}{\partial n}$ 发生间断，且有

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_i = \iint_S w(P) \frac{\partial}{\partial n_N}\left(\frac{e^{-ikr_{NP}}}{r_{NP}}\right) ds_P ds_P + 2\pi\omega(N)$$

$$\left(\frac{\partial u(N)}{\partial n_N}\right)_e = \iint_S w(P) \frac{\partial}{\partial n_N}\left(\frac{e^{-ikr_{NP}}}{r_{NP}}\right) ds_P - 2\pi\omega(N)$$

定理 2 设 $\gamma(P)$ 连续，则双层势

$$v(M) = \iint_S v(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_{NP}}}{r_{NP}}\right) ds_P$$

具有性质：

(i) 当 $M = N$ 时，位势积分收敛，记

$$v(N) = \iint_S \gamma(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}}\right) ds_P$$

(ii) 当 $M \in \Omega$ 或 M 在 Ω 的外部区域时，$v(M)$ 均满足

$$\Delta_3 v(M) + k^2 v(M) = 0$$

(iii)当 M 点沿着 S 上的点 N 的法线趋于 N 上的点 $v(M)$ 时，$v(M)$ 发生间断，且有

$$(v(N))_i = v(N) - 2\pi\gamma(N)$$

$$(v(N))_e = v(N) + 2\pi\gamma(N)$$

6.4.2 Helmholtz 方程的边值问题

用上述位势论可讨论把 Helmholtz 方程边值问题的解用位势来表示的可能性，例如设内部区域的第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u + k^2 u = 0 & M \in \Omega \\ u|_S = f(N) \end{cases} \tag{2}$$

若令

$$u(M)=\iint\limits_S \gamma(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}}ds_P$$

则根据位势论和边界条件可得积分方程

$$\gamma(N)=\iint\limits_S \gamma(P)K(N,P;k)dS_p-\frac{1}{2\pi}f(N) \tag{3}$$

其中

$$K(N,P;k)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-ikr_{NP}}(ikr_{NP}+1)}{r_{NP}^2}\cos(\vec{r}_{NP},n_P)$$

此积分方程的可解性和 k 的取值有关，当 $k=0$ 时，又成为调和方程的情况，这时对任意的 $f(N)$ 积分方程(3)有唯一解. 当 $k>0$，且 k^2 不是固有值问题

$$\begin{cases}\Delta V+\lambda V=0,\ M\in\Omega\\ V|_S=0\end{cases} \tag{4}$$

的固有值时，则积分方程(3)对任意的 $f(N)$ 均有唯一解，从而 Helmholtz 方程的第一边值问题(2)存在唯一解，且可用双层势来表示，当 k^2 是固有值问题(4)的固有值时，积分方程(3)的齐次方程有非零解，这时(3)有解的充要条件是

$$\iint\limits_S f(N)z(N)ds_N=0$$

其中 $z(N)$ 是

$$z(N)=\iint\limits_S K(P,N;k)z(P)ds_P$$

的非零解.

类似地可讨论用位势来表示 Helmholtz 方程的其它边值问题的解.

对于 Helmholtz 方程

$$\Delta_3 u-k^2u=0$$

则可根据其基本解 $\frac{-1}{4\pi r_{MP}}e^{-kr_{MP}}$ 来建立相应的位势而进行类似的

讨论.

对于二维 Helmholtz 方程

$$\Delta_2 u + k^2 u = 0$$

$$\Delta_2 u - k^2 u = 0$$

根据其基本解 $\frac{1}{4}\cdot N_0(kr_{MP})$ 和 $-\frac{k}{2\pi}K_0(kr_{MP})$ 也可建立相应的二维位势的理论，并讨论用位势来建造边值问题的解.

6.4.3 化更一般形式非齐次 Helmholtz 方程的边值问题为积分方程的另一方法

讨论更一般方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u + c(x)u = -f(x), & x \in \Omega \\ u|_S = 0 \end{cases} \tag{5}$$

设三维调和方程关于区域 Ω 的第一边值问题的格林函数为 $G(x, \xi)$.

则 $u(x)$ 满足积分方程

$$u(x) = -\iiint_\Omega G(x, \xi)c(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi + g(x) \tag{6}$$

其中

$$g(x) = -\iiint_\Omega G(x, \xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

如果令所设边值问题(5)的解为

$$u(x) = \iiint_\Omega G(x, \xi)\mu(\xi)\mathrm{d}\xi$$

则可得关于 $\mu(x)$ 的积分方程

$$\mu(x) = -\iiint_\Omega c(x)G(x, \xi)\mu(\xi)\mathrm{d}\xi - f(x) \tag{7}$$

由于 Green 函数的对称性，积分方程(6)和(7)是一对互为共轭的积分方程，所以根据积分方程的理论它们可解性的情况是完全相同的，特别可以证明，当 $c(x) \leqslant 0$ 时，则对于任意的 $f(x)$，积分

方程(6)和(7)的解是存在唯一的，从而证明了更一般的边值问题(5)解的存在性.

以上各节讨论了常系数线性二阶椭圆型方程对应的位势和位势理论，讨论了应用位势来表示边值问题的解的问题，对于更一般的变系数二阶线性椭圆型方程也可建立相应的三个位势和位势理论，它们是调和方程的位势理论的推广，而且性质也很相似，且也可通过位势理论和积分方程的理论讨论边值问题的解.

6.5 抛物位势和热传导方程的混合问题

6.5.1 抛物位势的理论介绍

$$E(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} H(t-\tau)$$

是一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的基本解，它满足

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta(x-\xi, t-\tau)$$

如果令

$$U(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2a\pi\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, \quad t \geqslant \tau$$

则 U 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & t > \tau \\ U|_{t=\tau} = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

基本解 E 或 U，当 $t > \tau$ 时均是无穷次连续可微的函数，且均满

足一维热传导方程，它们可解释为在时刻 $t=\tau$ 在点 $x=\xi$ 的一单位的点热源而产生的温度分布．另外当 $t>\tau$ 时，

$$2a^2\frac{\partial U}{\partial \xi}=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

也是热传导方程的解，它可解释为在时刻 τ 的偶极子热源在 $t>\tau$ 以后产生的温度分布，根据上述这些基本的解可建立下列位势

$$u(x,t;\xi)=\int_0^t w(\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau \qquad (1)$$

$$v(x,t;\xi)=\int_0^t w(\tau)\frac{x-\xi}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau \qquad (2)$$

分别称之为单层抛物位势和抛物双层位势，称 $w(t)$ 为位势的强度，ξ 是一个参数，总设时间变量 $t\geqslant 0$．根据古典的分析有下列定理．

定理 1　设 $w(t)$ 连续，则单位势(1)有下列性质：

(i)　$u(x,t;\xi)$ 在 $t\geqslant 0$ 中连续，且 $\lim\limits_{t\to 0^+}u=0$

(ii)　$x\neq\xi$ 时，在 $t>0$ 中 $u(x,t;\xi)$ 无穷次连续可微，且满足一维热传导方程

(iii)　通过直线 $x=\xi$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 发生间断，且

$$\lim_{x\to\xi-0}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{w(t)}{2a^2}$$

$$\lim_{x\to\xi+0}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2w(t)}{2a^2}$$

定理 2　设 $w(t)$ 连续，则双层势(2)具有下列性质：

(i)　$\lim\limits_{t\to 0^+}v=0$

(ii)　当 $t>0$，$x\neq\xi$ 时，$v(x,t;\xi)$ 无穷次连续可微，且满足一维热传导方程

(iii)　当穿过直线 $x=\xi$ 时，$v(x,t;\xi)$ 发生间断，且

$$\lim_{x\to\xi-0}v=-\omega(t)$$

$$\lim_{x \to \xi + 0} v = \omega(t)$$

上述两定理的证明较简单，但也一概省略.

6.5.2 利用位势解混合问题

问题一 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$

在双层势中分别取 $\xi = 0$ 和 $\xi = l$，利用两个双层位势来表示问题一的解，即令

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t w_1(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t w_2(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} (x-l) e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

根据边界条件和位势理论得关于 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 的积分方程组

$$\begin{cases} w_1(t) - \dfrac{l}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \frac{w_2(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = \mu_1(t) \\ -w_2(t) + \dfrac{l}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \frac{w_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = \mu_2(t) \end{cases}$$

此为 Velterra 第二型的积分方程，其解总是存在唯一的，可用逐次逼近法求解. 由于此为折积型的积分方程组，也可以用 Laplace 变换来求解. 如果把解用两个单层势来表示，则将得到 Velterra 第一型的积分方程组.

问题二 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = \mu_1(t),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$

用一个双层势和一个单层势的和来表示问题二的解，即令

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t w_1(\tau)\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t w_2(\tau)\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau$$

根据边界条件和位势理论可得 $(w_1(t), w_2(t))$ 的积分方程组

$$\begin{cases} w_1(t)+\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{w_2(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau=\mu_1(t) \\ \dfrac{1}{2a^2}w_2(t)+\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \dfrac{w_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau=\mu_2(t) \end{cases}$$

这也是 Velterra 第二型的积分方程组，且也是折积型的，其解存在唯一.

其它边界条件下的混合问题也可类似的用位势来表示解.

6.5.3 推广了的抛物位势和活动边界下热传导方程的混合问题

称

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

和

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}(x-\sigma(\tau))\mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

为推广了的抛物单层势和抛物双层势，称 $w(t)$ 为位势的强度. 设 $x=\sigma(t)(t\geqslant 0)$ 是 (x,t) 平面的一光滑曲线，当此曲线为直线 $x=\xi$ 时，则变为通常的抛物位势，对这种更一般的位势有下列定理.

定理 3 设 $w(t)$ 连续，则单层势 $u(x,t)$ 有下列性质：

(i) $t\geqslant 0$ 时，$u(x,t)$ 连续，且 $\lim\limits_{t\to 0}u(x,t)=0$

(ii) 除了曲线 $x=\sigma(t)$ 上的点外，$u(x,t)$ 无穷次连续可微，且满足热传方程

(iii) 通过曲线 $x=\sigma(t)$ 上的点 (x_0, t_0)，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 发生间断，且有

$$\frac{\partial u(x_0-0, t_0)}{\partial x}=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w(\tau)(x_0-\sigma(\tau))}{2a^2(t_0-\tau)^{3/2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x_0-\sigma(\tau))^2}{4a^2(t_0-\tau)}}\mathrm{d}\tau+\frac{w(t_0)}{2a^2}$$

$$\frac{\partial u(x_0+0, t_0)}{\partial x}=-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w(\tau)(x_0-\sigma(\tau))}{2a^2(t_0-\tau)^{3/2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x_0-\sigma(\tau))^2}{4a^2(t_0-\tau)}}\mathrm{d}\tau-\frac{w(t_0)}{2a^2}.$$

定理 4 若 $w(t)$ 连续，则双层势 $v(x, t)$ 具有下列性质：

(i) $\lim\limits_{t\to 0^+} v(x, t)=0$

(ii) 除了曲线 $x=\sigma(t)(t>0)$ 上的点外，$v(x, t)$ 满足热传导方程

(iii) 当沿着平行于 x 轴的直线通过曲线 $x=\sigma(t)$ 上的点 (x_0, t_0) 时，$v(x, t)$ 发生间断，且

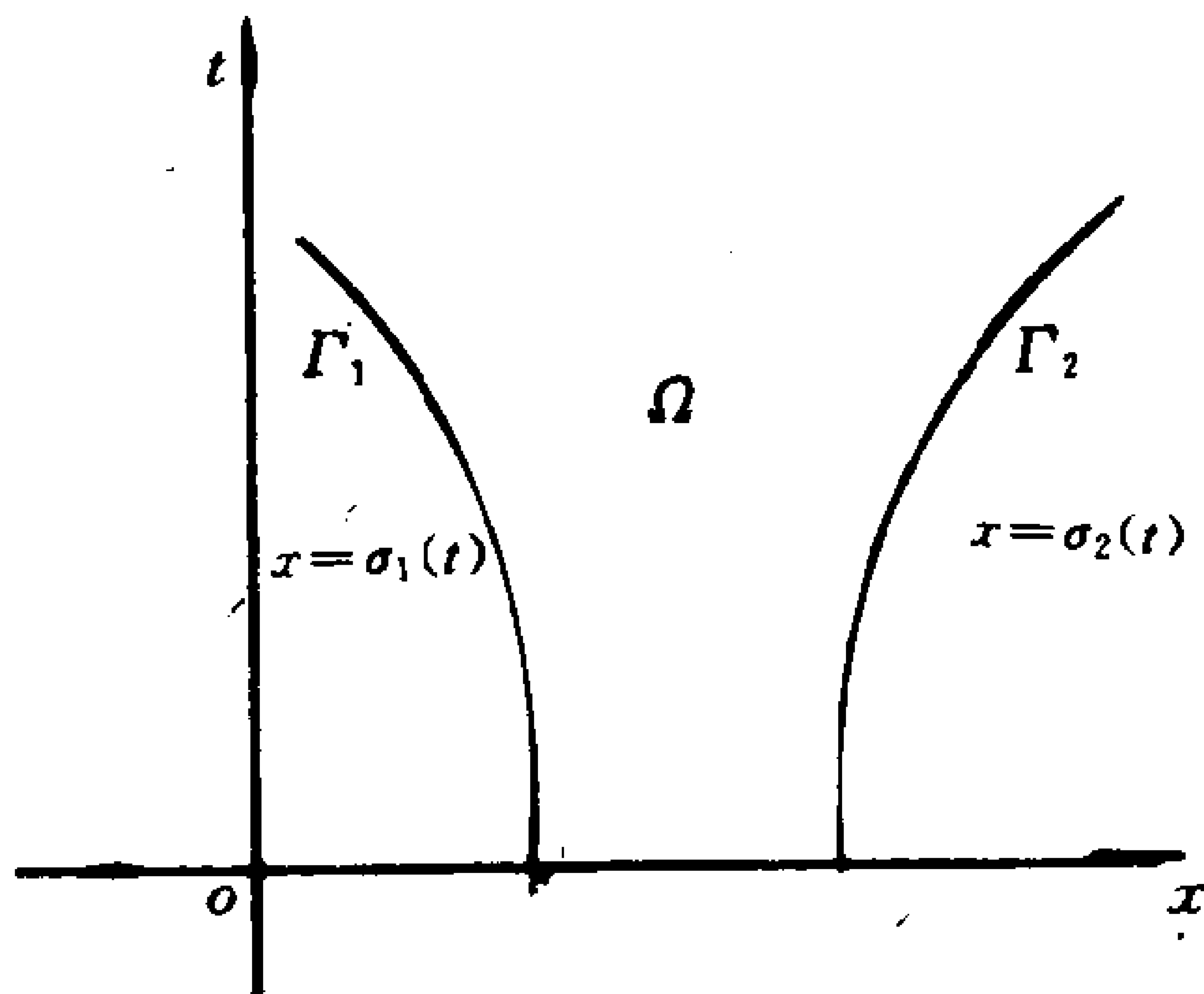


图 6.2

$$v(x_0-0, t_0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w(\tau)(x_0-\sigma(\tau))}{(t_0-\tau)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_0-\sigma(\tau))^2}{4a^2(t_0-\tau)}}\mathrm{d}\tau-w(t_0)$$

$$v(x_0+0, t_0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{w(\tau)(x_0-\sigma(\tau))}{(t_0-\tau)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_0-\sigma(\tau))^2}{4a^2(t_0-\tau)}}\mathrm{d}\tau+w(t_0)$$

应用推广了位势可以用来表示一维热传导方程活动边界下混

合问题的解.

如图 6.2，Ω 表示 (x, t) 平面中 $t \geqslant 0$ 内的一个区域，Γ_1：$x = \sigma_1(t)$ 和 Γ_2：$x = \sigma_2(t)$ 是它的两侧边界，$t = 0$ 的区间 $[c, d]$ 是 Ω 的底边. 讨论下列混合问题

$$\text{问题三}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ (x, t) \in \Omega \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\Gamma_1} = \mu_1(t), \ u|_{\Gamma_2} = \mu_2(t) \end{cases}$$

令

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \frac{w_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} (x - \sigma_i(\tau)) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma_i(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\tau$$

根据广义双层势的性质和边界条件得 $(w_1(t), w_2(t))$ 的积分方程组

$$w_1(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \frac{w_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} (\sigma_1(t) - \sigma_i(\tau)) \mathrm{e}^{-\frac{(\sigma_1(t)-\sigma_i(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\tau$$

$$= \mu_1(t)$$

$$-w_2(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \frac{w_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} (\sigma_2(t) - \sigma_i(\tau)) \mathrm{e}^{-\frac{(\sigma_2(t)-\sigma_i(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\tau$$

$$= \mu_2(t)$$

此仍为 Velterra 第二型的积分方程组，其解存在唯一.

对于其它边界条件下的混合问题也可类似的用适当的位势来表示问题的解.

$$\text{问题四}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \ (x, t) \in \Omega \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=\sigma_1(t)} = \mu_1(t), \ u|_{x=\sigma_2(t)} = \mu_2(t) \end{cases}$$

其中 Ω 如图 6.2，若要用位势来求解此种一般的非齐次问题，首先要使方程和初始条件齐次化，而这点也可以根据基本解 $E(x, t; \xi, \tau)$ 或 $U(x, t; \xi, \tau)$ 来构造适当的位势积分来完成，即设

$$u_1(x,t)=\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

$$u_2(x,t)=\int_c^d \varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\mathrm{d}\xi$$

则 $u_1(x,t)$ 满足非齐次方程和齐次初始条件，$u_2(x,t)$ 满足齐次方程和非齐次初始条件，所以作未知函数代换 $w(x,t)=u(x,t)-u_1(x,t)-u_2(x,t)$，则问题四转变为问题三.

6.5.4 高维抛物位势和高维热传导方程的混合问题

前述的一维抛物位势可以推广到高维的情况，而且也有基本的类似结果.

设 $x=(x_1,x_2)$，$\xi=(\xi_1,\xi_2)$ 为二维的空间变量，$t\geqslant 0$ 为时间变量，则

$$E(x,t;\xi,\tau)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} H(t-\tau)$$

是二维热传导方程的基本解，$\frac{\partial E}{\partial \xi_i}$ 也是热传导方程具有奇性的解，当 $x\neq\xi$ 时，$t>\tau$ 时，它们均满足二维热传导方程. 根据这种基本解可建立相应的位势.

设 Ω 是二维空间变量的一个区域，S 是它的边界，S 是一适当光滑的闭曲线，$r=|x-\xi|$，则可作出位势

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi,\tau)}{(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}l \tag{5}$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi,\tau)}{(t-\tau)}\left(\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\mathrm{d}l \tag{6}$$

其中 n 为 S 的外法向，分别称之为二维抛物单层位势和二维抛物双层位势，称 $w(x,t)$ 为相应位势的强度.

定理 5　设 $w(x,t)$ 为连续函数，则单层位(5)具有性质：

(i) $u(x, t)$ 在 $t \geqslant 0$ 中连续，$\lim\limits_{t \to 0^+} u(x, t) = 0$

(ii) $t > 0$，x 不在曲线 S 上的点时，$u(x, t)$ 满足二维热传导方程

(iii) 当点 x 沿着曲线 S 的点 N 的法线趋于 N 点时，$\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial n_N}$ 发生间断，且

$$\left(\frac{\partial u(N, t)}{\partial n_N}\right)_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi, \tau)}{(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial n_N} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}l + w(N, t)$$

$$\left(\frac{\partial u(N, t)}{\partial n_N}\right)_e = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi, \tau)}{(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial n_N} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}l - w(N, t)$$

定理 6 设 $w(x, t)$ 连续，则双层热(6)具有性质：

(i) $\lim\limits_{t \to 0^+} v(x, t) = 0$

(ii) 当 $t > 0$，x 点不在曲线 S 上的点时，$v(x, t)$ 满足二维热传导方程

(iii) 当点 x 沿着曲线 S 的点 N 的法线趋于 N 点时，$v(x, t)$ 发生间断，且

$$v_i(N, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi, \tau)}{(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}l - w(N, t)$$

$$v_e(N, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi, \tau)}{(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}l + w(N, t)$$

应用位势可以用来表示二维热传导方程混合问题的解.

问题五
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_2 u = 0, \ t > 0, \ x \in \Omega \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_S = \varphi(N, t) \end{cases}$$

设

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi, \tau)}{(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}l$$

根据位势的性质和边界条件，得关于强度 $w(x, t)$ 的积分方程

$$w(N, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_S \frac{w(\xi, \tau)}{(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial n} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}l - \varphi(N, t)$$

如果闭曲线 S 用适当的参数方程来表示，如 $S: x = x(\lambda)$，$0 \leqslant \lambda \leqslant b$，则未知的强度可记为 $w(\lambda, t)$，则上述积分方程为

$$w(\lambda, t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^b K(\lambda, t; s, \tau) w(s, \tau) \mathrm{d}s - \varphi(\lambda, t)$$

在此积分方程中关于 τ 的积分是变上限的，具有 Velterra 方程的特性，关于 S 的积分是定限的，具有 Fredholm 方程的特性. 但和 Velterra 方程一样，这种方程也总可用逐次逼近法求解，其解是存在唯一的.

应用位势类似的可以用来表示其它边界条件下二维热传导方程混合问题的解，另外还可以讨论外部区域的混合问题.

二维热传导方程的二维抛物位势容易推广到三维和高维的情况，其性质和形式是完全类似的，所以总可以用高维的抛物位势来表示高维热传导方程混合问题的解.

习 题 六

内容包括：退化核线性积分方程的解核和固有值问题，非齐次线性积分方程有解的相容性条件，用体位势求 Poisson 方程的特解，调和方程和 Holmholtz 方程的位势解和积分方程，抛物型方程混合问题的位势解和积分方程，通过 Green 函数化边值问题为积分方程.

1. 求解下列积分方程的解核，求相应齐次方程的固有值和固有函数，当 λ 为固有值时，列出非齐次方程有解的相容性条件，

(1) $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + \xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x)$

(2) $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin\xi + \sin 2x \sin 2\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + f(x)$

2. 用体位势求出 Poisson 方程

$$\Delta_3 u = f(x, y, z)$$

的一个特解，其中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \varphi(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant R \\ 0, r > R \end{cases}$$

特别当 $\varphi(r) = c$（常数）和 $\varphi(r) = r$ 时，求出 Poisson 方程的位势解.

3. 若用二维单层位势表示边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, (x, y) \in \Omega \\ \left(u + h\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big| = \varphi(x, y) \end{cases}$$

的解，推出位势的密度函数满足的积分方程.

4. 试用二维双层位势求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, r < R, (r, \theta) \text{ 为极坐标} \\ u|_{r=R} = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

5. 若用 Holmholtz 方程对应的双层位势表示边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u + k^2 u = 0, r < R \\ u|_{r=R} = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$

的解时，试推出密度函数 $\tau(\theta, \varphi)$ 所满足的积分方程，其中 (r, θ, φ) 为球坐标.

6. 设调和方程关于区域 Ω 的第一边值问题的 Green 函数为 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$，试把边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u - q(x, y, z)u = f(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

化为积分方程.

7. 试用两个双层位势化混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ x > 0,\ t+1 > x \\ u|_{x=0} = g_1(t),\ u|_{x=t+1} = g_2(t) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

为积分方程组.

8. 若用双层抛物位势表示混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u,\ t > 0,\ r < R \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{r=R} = f(\theta, t) \end{cases}$$

的解，试推出位势的强度函数 $b(\theta, t)$ 所应满足的积分方程，其中 (r, θ) 为极坐标.

B1

参 考 文 献

[1] В. И 斯米尔诺夫著，谷超豪，金福临译. 高等数学教程第四卷第二分册. 人民教育出版社，1958

[2] С. Л 索波列夫著，钱敏等译. 数学物理方程. 高等教育出版社，1958

[3] 吉洪诺夫，萨尔斯基著，黄欧等译. 数学物理方程(下). 高等教育出版社，1957

[4] 梁昆淼. 数学物理方法. 人民教育出版社，1960

[5] 郭敦仁. 数学物理方法. 人民教育出版社，1965

[6] 吴新谋等. 数学物理方程. 科学出版社，1958

[7] R. 柯朗，D. 希尔伯特著，钱敏，郭敦仁译. 数学物理方法 (I). 科学出版社，1958

[8] R. 柯朗，D. 希尔伯特著，熊振翔，杨应辰译. 数学物理方法 (II). 科学出版社，1981

[9] 杨应辰，徐明聪. 数学物理方程・特殊函数. 国防工业出版社，1980

[10] Tyn Myint-U 著，徐元钟译. 数学物理中的偏微分方程. 上海科学技术出版社，1983

[11] H. M. Lieberstein 著，蒋定华译，林建祥校. 偏微分方程理论. 高等教育出版社，1983

[12] 陆振球. 经典和现代数学物理方程. 上海科学技术出版社，1991

[13] 陈恕行. 偏微分方程概论. 人民教育出版社，1981

[14] E. C. 梯其玛希著，芝萌译. 与二阶微分方程相联系的本征函数展开(第一册). 上海科学技术出版社，1964

[15] И. Г 彼得洛夫著，胡祖炽译. 积分方程论讲义. 高等教育出版社，1954

[16] I. M. 盖尔芳特，G. E. 希洛夫著，林坚冰译. 广义函数(I). 科学出版社，1965

[17] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论. 科学出版社，1965

习题参考解答

习　题　一

1.

(1) $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=0$，$u=c_1+c_2\frac{1}{2}$

(2) $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+k^2u=0$，$u=c_1\frac{1}{r}e^{-ikr}+c_2\frac{1}{r}e^{ikr}$ 或 $=c_1\frac{\cos kr}{r}+c_2\frac{\sin kr}{r}$

(3) $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\frac{w}{a}\right)^2R=0$，$R=c_1\frac{1}{r}e^{-i\frac{w}{a}r}+c_2\frac{1}{r}e^{i\frac{w}{a}r}$

2.

(1) $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0$，$u=c_1+c_2\ln r$

(2) $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+k^2u=0$，$(u=c_1J_0(kr)+c_2N_0(kr))$

(3) $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\frac{w}{a}\right)^2R=0$，$\left(R=c_1J_0\left(\frac{w}{a}r\right)+c_1N_0\left(\frac{w}{a}r\right)\right)$

(4) $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-w^2R=0$，$(R=c_1I_0(wr+c_2K_0(wr))$

(5) $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\frac{w^2}{a^2}-\lambda^2\right)R=0$，$(R=c_1J_0\sqrt{\left(\frac{w^2}{a^2}-\lambda^2\right)}r+c_2N_0\sqrt{\left(\frac{w^2}{a^2}-\lambda^2\right)}r$

(6) $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0$，$(R=c_1J_n(kr)+$

$c_2 N_n(kr))$

3.

(1) $\dfrac{d^2R}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dR}{dr}-\dfrac{2}{r^2}R=0$

(2) $\dfrac{d^2R}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dR}{dr}+\left(\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)^2-\dfrac{2}{r^2}\right)R=0$

4.

(1) $u(x, y)=f(x)e^{-\int a(x, y)dy}$, f 任意

(2) $u(x, y, z)=f(x, y)e^{-\int a(x, y, z)dz}$, f 任意

(3) $u(x, y)=f(x)y^2+g(x)y+h(x)$, f, g, h 任意

(4) $u(x, y)=e^{-\int a(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int a(x)dx}\cdot dx+g(y)\right]$, f, g 任意

5.

(1) $x-\dfrac{y}{3}=c_1$, $x-3y=c_2$, $\xi=y-3x$, $\eta=y-\dfrac{1}{3}x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, $u(x, y)=f(y-3x)+g(y-\dfrac{x}{3})$, f, g 任意

(2) $\dfrac{y}{x}=c$, $\xi=\dfrac{y}{x}$, $\eta=x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$, $u=f(\dfrac{y}{x})+xg(\dfrac{y}{x})$, f, g 任意

6.

(1) $y>0$, $\xi=\dfrac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}$, $\eta=x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}=0$; $y<0$, $\xi=x-\dfrac{2}{5}(-y)^{\frac{5}{2}}$, $\eta=x+\dfrac{2}{5}(-y)^{\frac{5}{2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{10(\xi-\eta)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}-\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$

(2) $s=x+y$, $t=x-y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+5\dfrac{\partial u}{\partial s}-\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial z}+2u=0$

7.

(1) $y=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}u(x)$

$$u''(x)+\left(\theta(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)u(x)=0$$

(2) $u(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\lambda_1}\int a(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2\lambda_2}\int b(y)\mathrm{d}y}v(x,y)$，$\lambda_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\lambda_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+$

$$\left[c(x,y)-\left(\frac{a(x)}{2\lambda_1}\right)^2-\frac{a'(x)}{2\lambda_1}-\left(\frac{b(y)}{2\lambda_2}\right)^2-\frac{b'(y)}{2\lambda_2}\right]v=0$$

(3) $u(x,y)=\mathrm{e}^{\int a(x-y)\mathrm{d}x}v(x,y)$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(c(x,y)-a'(x-y)+a^2(x-y))v=0$

8.

(1)定解问题的唯一解为：$u(x,y)=\varphi(x)\mathrm{e}^{-\int_a^y a(x,y)\mathrm{d}y}$，由解的表达式知解 $u(x,y)$ 连续依赖于初值 $\varphi(x)$，所以定解问题适定.

(2)定解问题的解为 $u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)$

9.

(1)令 $\varphi(x,y,t)=(t-t_0)^2-\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}-\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}$，得

$$I=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\alpha^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\beta^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$
$$=4\left((t-t_0)^2-\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}-\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}\right)$$

所以在曲面 S：$\varphi(x,y,t)=0$ 上，$I=0$

(2)令 $\varphi(x,y,t)=t-c$，则恒有

$$a(x,y,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+b(x,y,t)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv 0$$

所以平面 $t=c$ 是方程的特征曲面族.

10.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad a^2 = \dfrac{k}{c\rho} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r) \\ \left(k\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\Big|_{r=R} = f(t)h \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + bf(t) \\ \left(-k\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=0} = hf(t),\ \left(k\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = hf(t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho},\ b = \frac{2h}{c\rho r}$$

12. $$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R\dfrac{\partial u}{\partial t},\ t > 0,\ 0 < x < l \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0,\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial x} + ku\right)\Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

习 题 二

1.

(1) $u = \varphi(x - 2t)$

(2) $u(x, t) = \varphi\left(\dfrac{x + at}{2}\right) + \psi\left(\dfrac{x - at}{2}\right) - \varphi(0)$

(3) $u(x, t) = \sin\dfrac{x + at}{2} + \sin\dfrac{x - at}{2} + \left(t - \dfrac{x}{a}\right)e^{t - \frac{x}{a}}$

(4) $u(x, t) =$

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta,\ x>0,\ t>0,\ x>at \\
\mathrm{e}^{h(x-at)}\Big[\displaystyle\int_0^{x-at}\Big[g(-\dfrac{\xi}{a})-\dfrac{\psi(-\xi)}{2a}+\dfrac{h}{2a}\int_0^{\xi}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta\Big]\mathrm{e}^{-h\xi}\mathrm{d}\xi+ \\
\qquad +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta\Big],\ x>0,\ t>0,\ x\leqslant at
\end{cases}
$$

2.

(1) 通解 $u(x, y)=f(y-3x)+g(y-\frac{1}{3}y)$，$f$，$g$ 任意，定解问题的解为

$$
u(x, y)=\frac{3}{8}\Big[3\varphi(x-\frac{y}{3})-\frac{1}{3}\varphi(x-3y)\Big]+\int_{x-3y}^{x-\frac{y}{3}}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta
$$

(x_0, y_0) 的依赖区间为 $\left[x_0-3y_0,\ x_0-\frac{y_0}{3}\right]$，$[1, 2]$ 上初始数据的确定区域为由 $y=0$，$y-3x=-3$，$y-\frac{1}{3}x=-\frac{2}{3}$ 围成的特征三角形.

(2) 通解为 $u(x, t)=f(t+\frac{1}{x})$，f 任意，定解问题的解为

$$
u(x, t)=\varphi\Big(\frac{x}{xt+1}\Big)
$$

(3) 通解为 $u(x, y, t)=f(t+\frac{1}{x},\ t+\frac{1}{y})$，$f$ 任意，定解问题的解为：$u(x, y, t)=\varphi\Big(\frac{x}{xt+1}, \frac{y}{yt+1}\Big)$

3.

确定性区域为 $t\geqslant 0$ 中由 $t=0$ 和 $x^2+y^2-a^2(t-\frac{1}{a})^2=0$ 所围成的锥体；影响区域为 $t\geqslant 0$ 中由 $t=0$ 和 $x^2+y^2-a^2(t+\frac{1}{a})^2=0$ 所围成的区域.

4.

设 $\psi(x, y, z) = \psi(x)$，$\varphi(x, y, z) = \varphi(x)$，直接由三维波动方程初值问题解的 Poisson 公式计算得出

$$u(x, t) = tM_{(x, y, z)}^{at}[\psi] + \frac{\partial}{\partial t}[tM_{(x, y, z)}^{at}[\varphi]]$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$$

5.

令 $w(x, y, z, t) = u(x, y, t)\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z}$，则

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Delta_3 w$$

$$w|_{t=0},\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y)\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z}$$

由 Poisson 公式得

$$u(x, y, t) = \mathrm{e}^{-\frac{c}{a}z}tM_{(x, y, z)}^{at}[\psi(x, y)\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z}]$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ct\cos\theta}\psi(x + at\sin\theta\cos\varphi,$$

$$+ y + at\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\varphi$$

6.

(1)直接由 Poisson 公式得 $u(x, y, 0, t) = 0$

(2)把初始数据 $\psi(x, y, z)$ 关于变数 z 进行奇延拓，然后直接应用 Poisson 公式得出解

$u(x, y, z, t)$

$$=\begin{cases}\dfrac{t}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+at\alpha_1,\ y+at\alpha_2,\ z+at\alpha_3)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \qquad\qquad z\geqslant at \\ \dfrac{t}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\Big[\int_0^{\cos^{-1}(-\frac{z}{at})}\psi(x+at\alpha_1,\ y+at\alpha_2,\ z+at\alpha_3)\sin\theta\mathrm{d}\theta- \\ -\displaystyle\int_{\cos^{-1}(-\frac{z}{at})}\psi(x+at\alpha_1,\ y+at\alpha_2,\ at\alpha_3-z)\sin\theta\mathrm{d}\theta\Big],\ z\leqslant at\end{cases}$$

其中 $\alpha_1=\sin\theta\cos\varphi,\ \alpha_2=\sin\theta\sin\varphi,\ \alpha_3=\cos\theta$

7.

(1)直接用 Poisson 公式得 $u(x,\ y,\ z,\ t)=(xt+y)z$

(2)直接用 Poisson 公式得 $u(x,\ y,\ t)=x^2+y^2+2a^2t^2+xyt$

习 题 三

1.

(1) $u(x,\ t)=a_0+b_0t+\sum\limits_{n=1}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\dfrac{n\pi a}{l}t\right)\cos\dfrac{n\pi}{l}$

$a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi_0,\ a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\varphi_n$

$b_0=\psi_0,\ b_n=\dfrac{l}{n\pi a}\psi_n$

(2) $u(x,\ t)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\mathrm{e}^{-a^2w_i^2t}X_i(x)$, $X_i(x)=k_1w_i\cos w_ix+\sin w_ix$

w_i 是 $(k_1+k_2)w\cos wl+(1-k_1k_2w^2)\sin wl=0$ 的第 i 个正根,

$$a_i = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_i(x) \mathrm{d}x}{\| X_i \|^2} = \varphi_i$$

(3) $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{ch} \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{sh} \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} y \cos \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{a} x$$

$$A_n = \frac{1}{sh \frac{n\pi}{b} a} \cdot \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \mathrm{d}y$$

$$B_n = \frac{1}{\mathrm{sh} \frac{(2n-1)}{2a} \pi b} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(y) \cos(\frac{2n-1}{2a}) \pi x \mathrm{d}x$$

(4) $u(x, t) = \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a^2}x} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin w_n t \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$B_n = \frac{2}{w_n l} \int_0^l \mathrm{e}^{\frac{b}{2a^2}x} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x$$

$$w_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 + \frac{b^2}{4a^2} + 1}$$

2.

(1) $u(r, t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi a}{R} t \sin \frac{n\pi}{R} r$

$$a_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^R r\psi(r) \sin \frac{n\pi}{R} r \mathrm{d}r$$

(2) $u(x, t) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^{-(3+(\frac{k\pi}{\ln 2})^2)t} \sin(\frac{k\pi}{\ln 2} \ln x)$

$$a_k = \frac{2}{\ln 2} \int_1^2 \varphi(x) \sin(\frac{k\pi}{\ln 2} \ln x) \mathrm{d}x$$

3.

(1) $$u(r,\theta)=\frac{1}{2}+\frac{\ln b}{\ln b-\ln a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\ln r+\frac{1}{2(b^2-a^2)}\left(-r^2+\frac{a^2b^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

(2) $$u(x,t)=w(x,t)+\left(\sin t-\frac{q}{k}x\right)$$

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-a^2\left(\frac{2n-1}{2l}\right)^2\pi^2 t}\cos\frac{2n-1}{2l}\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t b_n(\tau)e^{-a^2\left(\frac{2n-1}{2l}\right)^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\cos\frac{2n-1}{2l}\pi x$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(u_0+\frac{q}{k}x\right)\cos\frac{2n-1}{2l}\pi x\mathrm{d}x=\frac{4}{(2n-1)\pi}\left((-1)^{n+1}+(-1)^{n+1}\frac{ql}{k}-\frac{2ql}{k}\right)$$

$$b_n(\tau)=-\frac{2\cos\tau}{l}\int_0^l\cos\frac{2n-1}{2l}\pi x\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{(2n-1)\pi}\cos\tau$$

4.

(1) $$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin w_k t J_0(2w_k\sqrt{l-x})$$

$$a_k=\int_0^l\psi(x)J_0(2w_k\sqrt{l-x})\mathrm{d}x\Big/w_k\int_0^l J_0^2(2w_k\sqrt{l-x})\mathrm{d}x$$

w_k 是 $J_0(2w\sqrt{l})=0$ 的第 k 正根

(2) $$u(r,t)=e^t+w(r,t)$$

$$w(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-a^2w_k^2 t}J_0(w_k r)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t b_k(\tau)e^{-a^2w_k^2(t-\tau)}$$

$\mathrm{d}\tau J_0(w_k r)$

$$a_k = \int_0^R (\varphi(r) - 1) r J_0(w_k r)\mathrm{d}r \Big/ \int_0^R r J_0^2(w_k r)\mathrm{d}r$$

$$b_k(\tau) = -\mathrm{e}^{-\tau}\int_0^R r J_0(w_k r)\mathrm{d}r \Big/ \int_0^R r J_0^2(w_k r)\mathrm{d}r$$

w_k 为 $J_0(wR) = 0$ 的第 k 个正根

(3) $u(r, \theta) = \dfrac{I_0(kr)}{2I_0(kR)} + \dfrac{I_2(kr)}{2I_0(kR)}\cos 2\theta$

(4) $u(r, \theta) = a_0 I_0(kr) + b_0 K_0(kr) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n I_n(kr))$

$+ b_n K_n(kr)\cos n\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n I_n(kr)) + \mathrm{d}_n K_n(kr)\sin n\theta$

其中 a_n，b_n，a_0，b_0 根据边界条件和 Fourier 级数展开确定.

(5) $u(r, z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i \mathrm{sh} w_i z R_i(r)$

$R_i(r) = N_0(w_i a)J_0(w_i r) - J_0(w_i a)N_0(w_i r)$

w_i 是 $J_0(wa)N_0(wb) - J_0(wb)N_0(wa) = 0$ 的第 i 个正根

$$B_i = \int_a^b r f_2(r)R_i(r)\mathrm{d}r \Big/ \mathrm{sh} w_i l \int_a^b r R_i^2(r)\mathrm{d}r$$

(6) $u(r, \theta, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_{1k}\sin a w_{1k} t J_1(w_{1k} r)\cos\theta$

$$B_{1k} = \int_0^R r\varphi(r)J_1(w_{1k}r)\mathrm{d}r \Big/ a w_{1k}\int_0^R r J_1^2(w_{1k}r)\mathrm{d}r$$

w_{1k} 是 $J_1(wR) = 0$ 的第 k 个正根.

5.

(1) $$\begin{pmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n(kr)\\ K_n(kr)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos kz\\ \sin kz\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_n(kr)\\ N_n(kr)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{ch} kz\\ \mathrm{sh} kz\end{pmatrix}$$

(2) $$e^{i\omega t}\begin{pmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\lambda z\\ \sin\lambda z\end{pmatrix}\begin{bmatrix}J_n(\sqrt{\lambda^2-\frac{w^2}{a^2}}r)\\ N_n(\sqrt{\lambda^2-\frac{w^2}{a^2}}r)\end{bmatrix}$$

$$e^{i\omega t}\begin{pmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\lambda z\\ \mathrm{sh}\lambda z\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I_n(\sqrt{\lambda^2+\frac{w^2}{a^2}}r)\\ K_n(\sqrt{\lambda^2+\frac{w^2}{a^2}}r)\end{bmatrix}$$

6.

(1) $u=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(\frac{r}{R})^2P_2(\cos\theta)+\frac{1}{6}(\frac{r}{R})^2P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$

(2) $u=\frac{1}{3}(\frac{R}{r})-\frac{1}{3}(\frac{R}{r})^3P_2(\cos\theta)-\frac{1}{6}(\frac{R}{r})^3P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$

(3) $u(r,\theta)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_nP_n(\cos\theta)(\frac{r}{R})^n$

$f_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$

(4) $u=c-\frac{r^2}{6R}P_2(\cos\theta)+\frac{r^2}{12R}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$

(5) $$u=\frac{1}{3}\frac{I_0(kr)}{I_0(kR)}-\frac{1}{3}\frac{I_2(kr)}{I_2(kR)}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{6}\frac{I_2(kr)}{I_2(kR)}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$$

(6)因为初始条件为 $\frac{1}{3}r^2-\frac{r^2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{r^2}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$

所以得：

$u(r,\theta,\varphi,t)=u_1(r,t)+u_2(r,\theta,t)+u_3(r,\theta,\varphi,t)$

$$u_1(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\mathrm{e}^{-a^2w_k^2t}J_{\frac{1}{2}}(w_kr)$$

$$u_2(r,\theta,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\mathrm{e}^{-a^2\alpha_k^2t}J_{\frac{5}{2}}(\alpha_kr)P_2(\cos\theta)$$

$$u_3(r,\theta,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{-a^2\alpha_k^2t}J_{\frac{5}{2}}(\alpha_kr)P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$$

w_k 是 $J_{\frac{1}{2}}(wR)$ 的第 k 个正根，即 $w_k=\frac{k\pi}{R}$

α_k 是 $J_{\frac{5}{2}}(wR)$ 的第 k 个正根

$$a_k=\frac{1}{3}\int_0^R r^3J_{\frac{1}{2}}(w_kr)\mathrm{d}r\Big/\int_0^R rJ_{\frac{1}{2}}^2(w_kr)\mathrm{d}r$$

$$b_k=-\frac{1}{3}\int_0^R r^3J_{\frac{5}{2}}(\alpha_kr)\mathrm{d}r\Big/\int_0^R rJ_{\frac{5}{2}}^2(\alpha_kr)\mathrm{d}r$$

$$c_k=-\frac{1}{2}b_k$$

7.

(1) $$\begin{Bmatrix}\sqrt{\frac{1}{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\\ \sqrt{\frac{1}{r}}N_{n+\frac{1}{2}}(kr)\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}P_n^m(\cos\theta)$$

$m=0,1,2,\cdots,n=m,m+1,\cdots$

(2) $$\begin{Bmatrix}\sqrt{\frac{1}{r}}I_{n+\frac{1}{2}}(kr)\\ \sqrt{\frac{1}{r}}K_{n+\frac{1}{2}}(kr)\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}P_n^m(\cos\theta)$$

(3) $$\begin{Bmatrix}\sqrt{\frac{1}{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(\frac{w}{a}r)\\ \sqrt{\frac{1}{r}}N_{n+\frac{1}{2}}(\frac{w}{a}r)\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{pmatrix}P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{iwt}$$

习 题 四

1.

(1) $u(x, t) = \varphi(x - at) + \int_0^t f(x - a(t - \tau), \tau)\mathrm{d}\tau$

(2) $F^{-1}\left[\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}\right] = \frac{1}{2a}H(a^2t^2 - x^2)$

$$u(x, t) = \psi(x) * \frac{1}{2a}H(a^2t^2 - x^2) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi(x) * \frac{1}{2a}H(a^2t^2 - x^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}$$

(3) $u(x, t) = \frac{\mathrm{e}^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi+bt)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$

(4) $F\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \pi H(1 - \lambda^2)$

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\mathrm{e}^{-y}}{x^2 + y^2}(x\sin x - y\cos x)$$

(5) $F^{-1}\left[\frac{\sin at\sqrt{\lambda_1^2 + x_2^2}}{at\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda^2}}\right] = \frac{1}{2\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - x^2 - y^2}}$

$\cdot H(a^2t^2 - x^2 - y^2)$

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{(x,y)}^{at}}\psi(\xi,\eta)\frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$D_{(x,y)}^{at}$ 表示以 (x, y) 为圆心，at 为半径的圆域．

(6) $u(x, y, t) = y(x^2 + 2a^2t)$

2.

(1) 作关于自变量 x 的函数的 LT，可得出

$$u(x, t) = \varphi(x - at)H(x - at)$$

$$+\int_0^t f(x-a(t-\tau),\ \tau)H(x-a(t-\tau))\mathrm{d}\tau$$

(2) $u(x,\ t)=\mathrm{e}^{-c^2t}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+\mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\mathrm{d}\xi$

(3)

$$u(x,\ t)=-a\int_0^t g(\tau)\mathrm{e}^{-ah(t-\tau-\frac{x}{a})}H(t-\tau-\frac{x}{a})\mathrm{d}\tau$$

$$=-a\int_{t-\frac{x}{a}}^t g(\tau)\mathrm{e}^{-ah(t-\tau-\frac{x}{a})}\mathrm{d}\tau H(t-\frac{x}{a})$$

(4) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-\frac{a}{p}}\right)=J_0(2\sqrt{at})$

$$u(x)=g'(t)*J_0(2\sqrt{cxt})$$

$$=\int_0^t g'(\tau)J_0(2\sqrt{cx(t-\tau)})\mathrm{d}\tau$$

(5) $u(x,\ t)=\mathrm{e}^{-bx}g(t-x)H(t-x)$

(6) $u(x,y)=$

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}f(\xi)\left[\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}+\frac{y}{(x+\xi)^2+y^2}\right]\mathrm{d}\xi$，作 F_cT

3.

(1) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\lambda(x-\xi)}\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\delta(\xi-x)\mathrm{d}\xi=f(x)$

(2)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}\sin\lambda\xi\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}(\cos\lambda(\xi+x)-\cos\lambda(\xi-x))\mathrm{d}\lambda$$

$$= -\frac{\pi}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\,[\delta(x+\xi)-\delta(\xi-x)]\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)\mathrm{d}\xi = f(x) \quad (\because x>0)$$

(3)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}\cos\lambda\xi\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}(\cos\lambda(x+\xi)+\cos\lambda(\xi-x))\mathrm{d}\lambda$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\xi)\,(\delta(x+\xi)+\delta(\xi-x))\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)\mathrm{d}\xi = f(x)$$

4.

(1) 任取定一检验函数 $\varphi(x,t)$，可设 $\varphi(x,t)$ 和 $U(x,t;\xi,\tau)$ 的支集之交集在特征四边形 Ω 上(其中 Ω 是特征线 $x+at=\xi+a\tau$，$x-at=\xi-a\tau$，$x+at=N_1$，$x-at=N_2$ 所围成，$N_1>\xi+a\tau$，$N_2<\xi-a\tau$)，且在边界线 $x+at=N_1$ 和 $x-at=N_2$ 上，$\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial t}\equiv 0$，则直接验明．

$$<\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\varphi> = <U,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}>$$

$$= \frac{1}{2a}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \varphi(\xi,\tau)$$

(2) 任取定试验函数 $\varphi(x,t)$，可设 $\varphi(x,t)$ 和 U 的支集之交集在矩形 $\Omega=\{\tau\leqslant t\leqslant N,\ -N\leqslant x\leqslant N\}$ 上，且在边界 $t=N$，

$x=-N$，$x=N$ 上，$\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0$，则

$$<\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\varphi>=-<U,\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}>$$

$$=-\iint_\Omega U(x,t;\xi,\tau)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\varphi(\xi,\tau)$$

(3)类似于(2)，任意取试验函数 $\varphi(\xi,\tau)$，则

$$<-\frac{\partial U}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2},\varphi(\xi,\tau)>=-<U,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}>$$

$$=\varphi(x,t)$$

5.

(1) $E(x)=xe^xH(x)$

(2) $F^{-1}\left(\dfrac{\operatorname{sinc}\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}}\right)=\dfrac{1}{2a}J_0\left(\dfrac{b}{2a}\sqrt{a^2c^2-x^2}\right)H(a^2c^2-x^2)$

$$E(x,t)=\frac{1}{2a}e^{-\frac{1}{2}t}J_0\left(\frac{1}{2a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right)H(a^2t^2-x^2)H(t)$$

6.

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=\dfrac{1}{2\pi}\ln r$，$U=\dfrac{r^2}{8\pi}(\ln r-1)$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r}$，$U=-\dfrac{r}{8\pi}$

7.

(1) $U(x,t)=\delta(x-at)$，$E(x,t)=\delta(x-at)H(t)$

$$u(x,t)=U(x,t)*\varphi(x)+\int_0^t(U(x,t-\tau)*f(x,\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$=\varphi(x-at)+\int_0^t f(x-a(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau$$

(2) $U(x,t)=e^{ct}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}$，$E(x,t)=U(x,t)H(t)$

$$u(x,t)=e^{ct}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi+bt)^2}{4a^2t}}d\xi$$

(3) $U(x,t)=e^{-bt}\frac{1}{2a}H(t^2-x^2)$

$$E(x,t)=e^{-bt}\frac{1}{2a}H(t^2-x^2)H(t)$$

$$u=(\psi(x)+2b\varphi(x))*U(x,t)+\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(x)*U(x,t))$$

$$=\frac{1}{2a}e^{-bt}\left[\int_{x-at}^{x+at}(\psi(\xi)+b\varphi(\xi))d\xi\right]+e^{-bt}\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$$

(4) $U(x,t)=e^{t-\frac{1}{2}x}\frac{1}{2}I_0(\sqrt{\frac{3}{4}(t^2-x^2)})H(t^2-x^2)$

$$E(x,t)=U(x,t)H(t)$$

$$u(x,t)=\psi(x)*U(x,t)$$

$$=\frac{e^t}{2}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)e^{-\frac{1}{2}(x-\xi)}I_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-(x-\xi)^2)\right)d\xi$$

(5) $U=e^{ct}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2e^{-\frac{(x+bt)^2+y^2}{4a^2t}}$

(6) $U=\frac{1}{4\pi a\alpha\beta\gamma r}\delta(r-at)$, $r=\sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2}$

8.

$$U(x,t;\xi)=e^t\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\frac{n\pi}{l}a)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u(x,t)=\int_0^l\varphi(\xi)U(x,t;\xi)d\xi$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l f(\xi,\tau)U(x,t-\tau,\xi)d\xi$$

习 题 五

1.

$$(1)\ G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{h(\xi-1)-1}{1+h}x, & 0\leqslant x\leqslant\xi\\[2mm] \dfrac{h(x-1)-1}{1+h}\xi, & \xi<x\leqslant 1\end{cases}$$

$$(2)\ G(x,\xi)=\begin{cases}-\operatorname{ch}a(1-\xi)\operatorname{sh}a\xi/a\Delta(\xi), & 0\leqslant x\leqslant\xi\\ -\operatorname{ch}a(1-x)\operatorname{sh}a\xi/a\Delta(\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$\Delta(\xi)=\operatorname{ch}a\xi\operatorname{ch}a(1-\xi)+\operatorname{sh}a\xi\operatorname{sh}a(1-\xi)$$

$$(3)\ y(x)=-\int_0^1 G(x,\xi)q(\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^1 f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

2.

相容性条件：$\int_0^1\sin\pi x f(x)\mathrm{d}x=\pi(y(1)+y(0))$，广义 Green 函数 $G(x,\xi)$：

$$\begin{cases}G''+\pi^2G=\delta(x-\xi)-2\sin\pi x\sin\pi\xi\\ G(0,\xi)=0,\ G(1,\xi)=0\end{cases}$$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi\xi\sin\pi x+\dfrac{1}{\pi}(x\sin\pi\xi\cos\pi x+\xi\cos\pi\xi\sin\pi x)\\ \qquad 0\leqslant x\leqslant\xi\\ -\dfrac{1}{\pi}\sin\pi\xi\cos\pi x+\dfrac{1}{\pi}(x\sin\pi\xi\cos\pi x+\xi\cos\pi\xi\sin\pi x)\\ \qquad \xi\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$y(\xi)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi+y(1)\left(\frac{-1}{\pi}\sin\pi\xi-\xi\cos\pi\xi\right)$$

$$- y(0)\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi\xi + (\xi - 1)\cos\pi\xi\right)$$

3.

$$G(x, \xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\varphi_n(x)}{\lambda_n \| \varphi_n \|^2}.$$

$$y(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i \| \varphi_i(x) \|^2}\int_0^1 \varphi(x) f(x)\mathrm{d}x$$

$$+ y(1)k(1)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi)\varphi'_i(1)}{\lambda_i \| \varphi_i(x) \|^2} - y(0)k(0)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi)\varphi'_i(0)}{\lambda_i \| \varphi_i(x) \|^2}$$

4.

(1)设 $M(x, y)$，$M_0(\xi, \eta)$，$y > 0$，$\eta > 0$，$r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$，$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < R$，$M_1\left(\frac{R^2}{\rho^2}\xi, \frac{R^2}{\rho^2}\eta\right)$，$M_2\left(\frac{R^2}{\rho^2}\xi, \frac{-R^2}{\rho^2}\eta\right)$，$M_3(\xi, -\eta)$，$G(x, y; \xi, \eta) = +\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{MM_0} \cdot r_{MM_2}}{r_{MM_1} \cdot r_{MM_3}}$. 其中 r_{MM_i} 表示 M 和 M_i 两点的距离.

(2)设 $M(x, y)$ 的极坐标为 (r, θ)，$M_0(\xi, \eta)$ 的极坐标为 (ρ, θ_0)，则 $G(r, \theta, \rho, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_n(w_{nk}r)J_n(w_{nk}\rho)\sin n\theta\sin n\theta_0}{\pi w_{nk}^2\int_0^R J_n^2(w_{nk}r)\cdot r\mathrm{d}r}$ 其中 w_{nk} 是 $J_n(wR) = 0$ 的第 k 个正根

(3) $u(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s$

5.

(1)设 $M(x, y)$，$M_0(\xi, \eta)$ 为第一象限的两个点，$M_1(\xi, -\eta)$，$M_2(-\xi, -\eta)$，$M_2(-\xi, -\eta)$，$M_3(-\xi, \eta)$，则

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_{MM_0} \cdot r_{MM_2}}{r_{MM_1} \cdot r_{MM_3}}$$

(2)设 $z = x + yi$，$z_0 = \xi + \eta i$ 为角域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ 内两个

点，应用电象法或保角变换法均可得：

$$G(z, z_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^3-\bar{z}_0^3|}{|z^3-z_0^3|}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\bar{z}_0||z-\bar{z}_1||z-\bar{z}_2|}{|z-z_0||z-z_1||z-z_2|}$$

(3)应用作关于 x 的函数的 F_sT，则变为常微分方程的 Green 函数，继作关于 y 的函数的有限正弦变换，再总的作反演可得

$$G(x, y; \xi, \eta)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{-n|\xi-x|}-\mathrm{e}^{-n|\xi+x|})\sin ny\sin n\eta$$

反演时用到积分公式：$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|a|}$．本题也可用保角变换的方法，设 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{-z}-1}{\mathrm{e}^{-z}+1}$，则 $G(z, z_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{f(z)-\overline{f(z_0)}}{f(z)-f(z_0)}\right|$．

(4)设 $M(x, y)$，$M_0(\xi, \eta)$，$M_2\left(\frac{R^2}{\rho^2}\xi, \frac{R^2}{\rho^2}\eta\right)$，$M_3(\xi, -\eta)$，$M_4\left(\frac{R^2}{\rho^2}\xi, -\frac{R^2}{\rho^2}\eta\right)$，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，则

$$G(x, y; \xi, \eta)=-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{r_{MM_2}\cdot r_{MM_4}}{r_{MM_0}\cdot r_{MM_3}}\cdot\frac{R^2}{\rho^2}\right)$$

(5)设 $M(x, y)$，$M_0(\xi, \eta)$ 为第一象限的两点，则

$$G(x, y; \xi, \eta)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{((x+\xi)^2+(y-\eta)^2)((x+\xi)^2+(y+\eta)^2)}{((x-\xi)^2-(y+\eta)^2)((x-\xi)^2+(y+\eta)^2)}$$

(6)设圆内两点 $M(x, y)$ 和 $M_0(\xi, \eta)$ 的极坐标分别为 $M(r, \theta)$ 和 $M_0(\rho, \theta_0)$，w_{ni} 是 $J_n(wR)=0$ 的第 i 个正根，则

$$G=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi A_{oi}(w_{oi}^2+k^2)}J_0(w_{oi}r)J_0(w_{oi}\rho)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\pi A_{ni}(w_{oi}^2+k^2)}J_n(w_{ni}r)J_n(w_{ni}\rho)\cos n(\theta-\theta_0)$$

$$A_{ni}=\int_0^R rJ_n^2(w_{ni}r)\mathrm{d}r$$

6.

应用 Green 公式并注意到 $(\Delta_3+k^2)\left(\frac{\cos kr}{r}\right)=-4\pi\delta(x-\xi,\ y-\eta,\ \xi-z)$ 即可证明.

7.

(1) 设上半球内两点 $M(x,\ y,\ z)$，$M_0(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$，$M_1\left(\frac{R^2}{\rho^2}\xi,\ \frac{R^2}{\rho^2}\eta,\ \frac{R^2}{\rho^2}\zeta\right)$，$M_2(\xi,\ \eta,\ -\zeta)$，$M_3\left(\frac{R^2}{\rho^2}\xi,\ \frac{R^2}{\rho^2}\eta,\ -\frac{R^2}{\rho^2}\zeta\right)$，则

$$G=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_2}}+\frac{R}{\rho}\left(\frac{1}{r_{MM_3}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\right)\right]$$

(2) 设 $M(x,\ y,\ z)$，$M_0(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 为上半空间的两点，$M_1(\xi,\ \eta,\ -\zeta)$，则

$$G=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\mathrm{e}^{-ikr_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\mathrm{e}^{-ikr_{MM_1}}\right)$$

(3) $$G=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\mathrm{e}^{-ikr_{MM_0}}+\frac{1}{r_{MM_1}}\mathrm{e}^{-ikr_{MM_1}}\right)$$

(4) $$G=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\mathrm{e}^{-kr_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\mathrm{e}^{-kr_{MM_1}}\right)$$

8.

(1) $$\begin{cases}\Delta_2 G=\delta(x-\xi,\ y-\eta)-\dfrac{1}{\pi R^2}\\ \dfrac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

$$G=C-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{w_{0k}^2A_{0k}}J_0(w_{0k}r)J_0(w_{0k}\rho)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{w_{nk}^2 A_{nk}}J_n(w_{nk}\rho)\cos n(\theta-\theta_0)$$

w_{nk} 是 $J'_n(wR)=0$ 的第 k 个正根，圆内点 $M(x, y)$ 和 $M_0(\xi, \eta)$ 的极坐标为 (r, θ) 和 (ρ, θ_0)，$A_{nk}=\int_0^R rJ_n^2(w_{nk}r)\mathrm{d}r$. 问题有解的相容性条件是 $\iint_\Omega f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial\Omega}\varphi\mathrm{d}s$

(2)

$$\begin{cases}\Delta_2 G+2\pi^2 G=\delta(x-\xi, y-\eta)-\frac{4}{\pi^2}(\sin\pi\xi\sin\pi x\sin\pi\eta\sin\pi y)\\ G|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

$$G=-\frac{4}{\pi^4}\sum_{n+m>2}^{\infty}\sum^{\infty}\frac{1}{n^2+m^2-2}\sin n\pi x\sin m\pi y\sin n\pi\xi\sin m\pi\eta$$
$$+A\sin\pi x\sin\pi\xi\sin\pi y\sin\pi\eta$$

9.

(1) $$G=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]H(t-\tau)$$

$$u(x, t)=\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^{+\infty}f(\xi, \tau)G\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)G|_{\tau=0}\mathrm{d}\xi$$
$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}g(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau$$

(2) $$G=\frac{1}{2a}\left[H(a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2)-H(a^2(t-\tau)^2-(x+\xi)^2)\right]H(t-\tau)$$

$$u(x, t)=\iint_{\substack{\tau\geqslant 0\\ \xi\geqslant 0}}f(\xi, \tau)G\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau-\int_0^{+\infty}\left[\varphi(\xi)\frac{\partial G}{\partial\xi}-G\psi(\xi)\right]_{\tau=0}\mathrm{d}\xi$$

$$+ a^2 \int_0^{+\infty} g(\tau) \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} \mathrm{d}\tau$$

由此，当 $x - at \geqslant 0$ 时得

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-at}^{x+at} f(\xi, t-\tau)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+ \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at))$$

当 $x - at < 0$ 时得

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\iint_\Omega f(\xi, \tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+ \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(at-x)) + g(t - \frac{x}{a})$$

其中 Ω 是由 $\tau = 0$，$(\xi - x) + a(\tau - t) = 0$，$(\xi - x) - a(t - \tau) = 0$，和 $\xi + x + a(\tau - t) = 0$ 所围成的四边形区域.

10.

(1) $R(x, y; \xi, \eta) = J_0(2\sqrt{c(x-\xi)(y-\eta)})$

$$u(\xi,\eta) = \varphi(0)J_0(2\sqrt{c\xi\eta}) + \int_0^\xi \varphi'(x)J_0(2\sqrt{c(x-\xi)\eta})\mathrm{d}x$$

$$+ \int_0^\eta \psi'(y)J_0(2\sqrt{c\xi(y-\eta)})\mathrm{d}y$$

(2) $R(x, y; \xi, \eta) =$

$$\left(\frac{\xi}{x}\right)^b \left(\frac{\eta}{y}\right)^a J_0(2\sqrt{(c-ab)(\ln x - \ln\xi)(\ln y - \ln\eta)})$$

其中视 (ξ, η) 为自变量，(x, y) 为参变量.

$$u(x,y) = \frac{1}{2x^b y^a}[\varphi(x)x^{a+b} + \varphi(y)y^{a+b}]$$

$$+ \frac{1}{2x^b y^a}\int_0^y \eta^{a+b} V(x, y; \xi, \eta)\left[2\psi(\eta) + \frac{a-b}{\eta}\varphi(\eta) - \varphi'(\eta)\right]\mathrm{d}\eta$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = J_0(2\sqrt{(c-ab)(\ln x - \ln\xi)(\ln y - \ln\eta)})$$

(3)直接验证：

$$R|_{x=\xi} = 1, R|_{y=\eta} = 1, \frac{\partial R}{\partial x \partial y} + f(x, y)R = 0$$

习 题 六

1.

(1)解得

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left((1-\frac{\lambda}{2})x + \frac{\lambda}{3}x\xi + \lambda + (1-\frac{\lambda}{2})\xi\right)$$

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}$$

固有值 $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}$，$\lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$，相应的固有函数 $\varphi_1(x) = \sqrt{3}x + 1$，$\varphi_2(x) = -\sqrt{3}x + 1$，$\lambda = \lambda_1$ 时，相容性条件 $\int_0^1 f(x)(\sqrt{3}x + 1)\mathrm{d}x = 0$；$\lambda = \lambda_2$ 时，相容性条件 $\int_0^1 f(x)(-\sqrt{3}x + 1)\mathrm{d}x = 0$

(2) $\Gamma(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{(1-\lambda\pi)^2}((1-\lambda\pi)\sin x\sin\xi + (1-\lambda\pi)\sin 2x\sin 2\xi)$，$\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$ 的固有函数是 $\sin x$ 和 $\sin 2x$，$\lambda = \frac{1}{\pi}$ 时方程有解的相容性条件为

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = 0 \text{ 且} \int_0^{2\pi} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x = 0$$

2.

$$u = u(r) = \begin{cases} -\frac{1}{r}\int_0^R \rho^2\varphi(\rho)\mathrm{d}\rho, & r > R \\ -\frac{1}{r}\int_0^R \rho^2\varphi(\rho)\mathrm{d}\rho - \int_r^R \rho\varphi(\rho)\mathrm{d}\rho, & r \leqslant R \end{cases}$$

特别 $\varphi(\rho) = c$ 时

$$u=\begin{cases}-\dfrac{cR^3}{3r},\ r>R\\ \dfrac{c}{6}(r^2-3R^2),\ r\leqslant R\end{cases}$$

$\varphi(\rho)=\rho$ 时

$$u=\begin{cases}-\dfrac{R^4}{4r},\ r>R\\ \dfrac{1}{12}r^3-\dfrac{R^3}{3},\ r\leqslant R\end{cases}$$

3.

在边界 $\partial\Omega$ 上单层势的密度函数满足

$$\omega(N)=\frac{1}{\pi h}\varphi(N)-\frac{1}{\pi h}$$

$$\int_{\partial\Omega}w(P)\left(\ln\frac{1}{r_{NP}}+h\frac{\cos(\vec{r}_{Np},\vec{n}_N)}{r_{NP}}\right)\mathrm{d}l_p$$

4.

$$u(M)=-\int_{\partial\Omega}\tau(P)\frac{\cos(\vec{r}_{MP},\vec{n}_P)}{r_{MP}}\mathrm{d}l_P,\ M\in\Omega$$

$$\tau(\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tau(\theta')\mathrm{d}\theta'-\frac{1}{\pi}f(\theta)$$

$$\tau(\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}f(\theta')\mathrm{d}\theta'-\frac{1}{\pi}f(\theta)$$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{r^2+R^2-2Rr\cos(\theta'-\theta)}f(\theta')\mathrm{d}\theta'$$

5.

$$u(M)=\iint_S\tau(P)\frac{\partial}{\partial n_p}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}}\right)\mathrm{d}s_p$$

$$\tau(\theta,\varphi)=\frac{1}{2\pi}f(\theta,\varphi)+\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\tau(\theta',\varphi')K(\theta,\varphi,\theta',\varphi')\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}\theta'$$

$$K(\theta,\varphi,\theta',\varphi')=\frac{(1+ikr_{NP})}{r_{NP}}e^{-ir_{NP}k}\sin\theta'$$

$$r_{NP}=2R^2(1-\sin\theta'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')-\cos\theta\cos\theta')$$

6.

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega}G(M,M_0)q(M_0)u(M_0)\mathrm{d}M_0+g(M).$$ 其中，$M(x, y, z)$，$M_0(\xi, \eta, \zeta)$，$g(M)=\iint\limits_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s+\iiint\limits_{\Omega}f(M_0)G(M_0)\mathrm{d}M_0$

7.

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{w_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{w_2(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}(x-\tau-1)e^{-\frac{(x-\tau-1)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau$$

$$\begin{cases} w_1(t)-\displaystyle\int_0^t w_2(\tau)K_1(t,\tau)\mathrm{d}\tau=g_1(t) \\ w_2(t)+\displaystyle\int_0^t w_1(\tau)K_2(t,\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t w_2(\tau)K_3(t,\tau)\mathrm{d}\tau=g_2(t) \end{cases}$$

$$K_1(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\frac{(\tau+1)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(\tau+1)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$K_2(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\frac{(\tau+1)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(t+1)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$K_3(t,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}e^{-\frac{(t-\tau)}{4a^2}}$$

8.

$$u(M,t)=-\int_0^t\frac{1}{4a^2(t-\tau)^2}\mathrm{d}\tau\int_{\partial\Omega}b(P,\tau)K(M,t,P,\tau)\mathrm{d}l_P$$

$$K(M,\ t,\ P,\ \tau) = r_{MP}\cos(\vec{r}_{MP},\ \vec{n}_P)\mathrm{e}^{-\frac{r_{MP}}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$b(\theta,\ t) = -R^2\int_0^t \frac{1}{4a^2(t-\tau)^2}\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi} b(\theta',\ \tau)K_1(\theta,\ t,\ \theta',\ \tau)\mathrm{d}\theta'$$

$$-\varphi(\theta,\ t)$$

$$K_1 = (1-\cos(\theta-\theta'))\mathrm{e}^{-\frac{R^2(1-\cos(\theta-\theta'))}{4a^2(t-\tau)}}$$

[General Information]
[illegible]=[illegible]
[illegible]=[illegible]
[illegible]=394
SS[illegible]=10069691
[illegible]=